

# Esercizi svolti per Geometria 1 per Fisici 2008/09

F.Pugliese

January 25, 2009

## Abstract

In queste note svolgerò alcuni esercizi sulla parte del corso che mi riguarda; si tenga presente che si tratta solo di alcuni degli argomenti svolti (in particolare, nelle prove scritte potranno comparire altri tipi di problemi)

## 1 Sottospazi e loro rappresentazione. Applicazioni lineari e loro rappresentazione.

### 1.1 Esercizio 1

Sia  $V$  uno spazio vettoriale  $n$ -dimensionale sul campo  $K$ . Sia inoltre  $A = \|a_{ij}\| \in M_{n-1,n}(K)$  una matrice di rango  $n-1$ . Si consideri il sottospazio  $W \leq V$  di equazioni cartesiane (in una base fissata di  $V$ )

$$Ax = 0, \quad (1)$$

con  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ . Si dimostri che  $W$  è la retta di equazioni parametriche

$$x_i = (-1)^{i-1} |A_i| t, \quad t \in K, \quad (2)$$

dove  $A_i \in M_{n-1,n-1}(K)$  si ottiene da  $A$  eliminando l' $i$ -ma colonna  $a^i = (a_{1i}, \dots, a_{ni})^T$ .

**Svolgimento.** Che  $W$  sia una retta segue dal fatto che, nelle ipotesi fatte, il sistema (1) ammette  $\infty^1$  soluzioni. Per ottenere la forma parametrica (2) si osservi innanzitutto che (1) può essere risolto rispetto a  $n-1$  delle incognite  $x_i$ , precisamente quelle corrispondenti a un minore fondamentale di  $A$ ; tanto per fissare le idee, supponiamo che tali incognite siano  $x_1, \dots, x_{n-1}$ . Il sistema (1) si può allora riscrivere

$$A_n \tilde{x} = -x_n a^n, \quad (3)$$

con  $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{n-1})$ . Risolvendo (3) con la regola di Cramer si ottiene

$$x_i = -\frac{|\tilde{A}_i|}{|A_n|} x_n, \quad (4)$$

con  $\tilde{A}_i \in M_{n-1, n-1}(K)$  ottenuta da  $A_n$  sostituendo  $a^n$  ad  $a^i$ . Ora, è facile rendersi conto che  $\tilde{A}_i$  si trasforma in  $A_i$  con esattamente  $n - i - 1$  scambi di colonne, sicchè la (4) diventa

$$x_i = (-1)^{n-i} \frac{|A_i|}{|A_n|} x_n;$$

ponendo  $t = x_n / |A_n|$  si ottengono le (2).

## 1.2 Esercizio 2

Sia  $W \subset \mathbb{R}^3$  la retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

e sia  $Z \subset \mathbb{R}^3$  la retta generata dal vettore  $z = (1, -1, 2)$ . Dimostrare che il sottospazio  $P = W + Z$  è un piano e determinarne l'equazione cartesiana.

**Svolgimento.** Per dimostrare che  $P$  è un piano, cioè che  $\dim P = 2$  basta mostrare che  $W \cap Z = \{0\}$  (infatti dalla formula di Grassmann segue che  $\dim P = \dim W + \dim Z - \dim W \cap Z = 1 + 1 - 0$ ). Ma una soluzione di (5) è, ad esempio, il vettore  $w = (0, 1, -3)$  che è chiaramente non parallelo a  $z$ , quindi le due rette hanno solo il vettore nullo in comune. Poichè  $P = \langle w, z \rangle$  una sua rappresentazione parametrica è data da  $x = sw + tz$ , con  $t, s \in \mathbb{R}$  o più esplicitamente

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = s - t \\ x_3 = -3s + 2t \end{cases},$$

da cui, eliminando i parametri ( $t = x_1, s = x_2 + x_1$ ), si ottiene l'equazione cartesiana

$$x_3 = -3(x_2 + x_1) + 2x_1,$$

cioè

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 0$$

## 1.3 Esercizio 3

Sia  $F \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$  l'endomorfismo la cui matrice nella base standard è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix};$$

1. trovare la matrice di  $F$  rispetto alla base  $w_1 = (1, -1), w_2 = (0, 3)$ ;

2. scrivere l'equazione cartesiana (rispetto alla base standard) della retta  $F(Z)$ , essendo  $Z$  la retta di equazione

$$x_1 - 3x_2 = 0 \quad (6)$$

**Svolgimento.**

1. Chiamiamo  $B$  la matrice di  $F$  rispetto alla base  $\mathcal{B} = (w_1, w_2)$ , allora le sue colonne sono i vettori delle componenti di  $F(w_1), F(w_2)$  rispetto a  $\mathcal{B}$ . Chiamando  $\mathcal{S}$  la base standard, la matrice di passaggio da  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{S}$  è quella che ha per colonne le componenti rispetto a  $\mathcal{S}$  dei vettori di  $B$ :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix};$$

di conseguenza la matrice di passaggio da  $\mathcal{S}$  a  $\mathcal{B}$  è

$$P^{-1} = \frac{1}{|P|} P^* = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ora, le componenti di  $F(w_1)$  rispetto a  $\mathcal{S}$  sono

$$F(w_1) \stackrel{\mathcal{S}}{\equiv} A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

quindi

$$F(w_1) \stackrel{\mathcal{B}}{\equiv} P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix};$$

analogamente

$$F(w_2) \stackrel{\mathcal{B}}{\equiv} P^{-1} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix};$$

quindi la matrice di  $F$  rispetto a  $\mathcal{B}$  è

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

2. una soluzione di (6) è  $z = (3, -1)$ , quindi  $F(Z) = F(\langle z \rangle) = \langle F(z) \rangle$ , con

$$F(z) = A \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix};$$

quindi la rappresentazione parametrica di  $F(Z)$  è

$$\begin{cases} x_1 = 5t \\ x_2 = 9t \end{cases},$$

da cui, eliminando  $t$ , si ottiene l'equazione cartesiana:

$$9x_1 - 5x_2 = 0$$

#### 1.4 Esercizio 4

Siano  $W, Z_\lambda \subset \mathbb{R}^4$  due sottospazi di equazioni cartesiane, rispettivamente:

$$W : \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \quad (7)$$

e

$$Z_\lambda : \begin{cases} \lambda x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2\lambda x_3 - x_4 = 0 \end{cases}, \quad (8)$$

dove  $\lambda \in \mathbb{R}$  è un parametro variabile. Determinare per quali valori di  $\lambda$  (se esistono) il sottospazio  $W + Z_\lambda$  ha dimensione 3 e scriverne le equazioni cartesiane.

**Svolgimento.** Innanzitutto, dalla formula di Grassmann segue che

$$\dim(W + Z_\lambda) = \dim W + \dim Z_\lambda - \dim(W \cap Z_\lambda)$$

Ora, il rango della matrice del sistema (7)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

è chiaramente 2, sicchè  $\dim W = 4 - 2 = 2$ . La matrice del sistema (8) è

$$\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2\lambda & -1 \end{pmatrix};$$

essa ha sempre rango 2, per qualunque valore di  $\lambda$ , in quanto un suo minore d'ordine 2 è pari a 1; di conseguenza  $\dim Z_\lambda = 2$ , per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$ . L'intersezione  $W \cap Z_\lambda$  è descritta dal sistema delle quattro equazioni congiunte (7) + (8); bisogna vedere per quali valori di  $\lambda$  la matrice di tale sistema

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ \lambda & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2\lambda & -1 \end{pmatrix}$$

ha rango 3. Ma il minore d'ordine 3 di  $A_\lambda$  determinato dalle prime tre righe e dalle ultime tre colonne è uguale a

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0,$$

quindi  $A_\lambda$  ha rango 3 se e solo se  $|A_\lambda|$  si annulla. Sviluppando con la regola di Laplace rispetto alla prima colonna si ottiene:

$$|A_\lambda| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2\lambda & -1 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2\lambda & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2\lambda^2 + 7\lambda + 5;$$

quindi  $A_\lambda$  ha rango 3 solo per i seguenti valori del parametro:

$$\lambda_1 = \frac{1}{4}(7 - \sqrt{89}), \quad \lambda_2 = \frac{1}{4}(7 + \sqrt{89}) \quad (9)$$

Dunque, gli unici due valori di  $\lambda$  per i quali  $Z_\lambda$  non è in somma diretta con  $W$ , e quindi  $\dim(W + Z_\lambda) = 3$ , sono  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . In entrambi i casi le prime tre righe di  $A_{\lambda_i}$  sono linearmente indipendenti, per cui le tre equazioni corrispondenti del sistema (7) + (8) equivalgono all'intero sistema; le  $\infty^1$  soluzioni di questo sistema si ottengono (v. esercizio della sezione 1.1) prendendo, a segni alterni, i minori d'ordine 3 della matrice formata dalle prime tre righe di  $A_{\lambda_i}$ :

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ \lambda & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ \lambda & -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ \lambda & -1 & 0 \end{vmatrix};$$

in altri termini,  $W \cap Z_i = \langle \xi_i \rangle$ , con

$$\xi_i = (-4, 1 - 3\lambda_i, 3 - \lambda_i, \lambda_i + 1)$$

Per costruire una base di  $W + Z_i$  basta aggiungere a  $\xi_i$  un vettore  $w$  di  $W$  e un  $z_i$  vettore di  $Z_i$  non paralleli a  $\xi_i$ ; ad esempio, possiamo prendere

$$w = (1, 2, 0, -1), \quad z_i = (0, 2\lambda_i, -1, 2\lambda_i).$$

La rappresentazione parametrica di  $W + Z_i$  corrispondente alla base  $(\xi_i, w, z_i)$  è  $x = a\xi_i + bw + cz_i$ , con  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , ovvero

$$\begin{cases} x_1 = -4a + b \\ x_2 = (1 - 3\lambda_i)a + 2b + 2\lambda_i c \\ x_3 = (3 - \lambda_i)a - c \\ x_4 = (\lambda_i + 1)a - b + 2\lambda_i c \end{cases};$$

risolvendo tre di queste equazioni, ad esempio le 1,3,4, rispetto ad  $a, b, c$ ,

$$\begin{aligned} a &= -\frac{x_1 + x_4 + 2\lambda_i x_3}{2\lambda_i^2 - 7\lambda_i + 3} \\ b &= x_1 + 4a = \dots \\ c &= (3 - \lambda_i a) - x_3 = \dots \end{aligned}$$

e sostituendo nella rimanente si ottiene la rappresentazione cartesiana di  $W + Z_i$ :

$$[\text{fatelo voi...}] \quad (10)$$

sostituendo in (10) a  $\lambda_i$  i due valori (9) si ottengono le equazioni cartesiane dei due iperpiani  $W + Z_1, W + Z_2$  [fatelo voi].

## 1.5 Esercizio 5

Sia  $V$  uno spazio vettoriale (di dimensione finita sul campo  $\mathbb{K}$ ) e sia  $A \in \text{End}(V)$  un suo endomorfismo. Sia

$$\mathcal{C}_A \stackrel{\text{def}}{=} \{B \in \text{End}(V) \mid AB = BA\}$$

l'insieme degli endomorfismi di  $V$  che commutano con  $A$ .

1. Dimostrare che  $\mathcal{C}_A$  è un sottospazio vettoriale di  $End(V)$
2. Trovare  $\mathcal{C}_A$  e calcolarne la dimensione nel caso in cui  $V = \mathbb{R}^2$  e

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Determinare per quali  $A \in End(\mathbb{R}^2)$  vale  $\dim \mathcal{C}_A = 3, 2$  e  $1$  rispettivamente.

**Svolgimento.**

1. Siano  $B, C \in \mathcal{C}_A$ , dimostriamo che anche  $B + C \in \mathcal{C}_A$ . In effetti

$$A(B + C) = AB + AC = BA + CA = (B + C)A$$

Analogamente, si vede che, per ogni  $B \in \mathcal{C}_A$  e per ogni  $\lambda \in \mathbb{K}$ , anche  $\lambda B \in \mathcal{C}_A$ .

2. Un endomorfismo

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \tag{11}$$

di  $\mathbb{R}^2$  appartiene a  $\mathcal{C}_A$  se e solo se  $AB - BA = 0$ ; ma

$$AB - BA = \begin{pmatrix} -y & 2y \\ x - 2z - t & y \end{pmatrix}$$

quindi le componenti di  $B$  devono soddisfare le condizioni

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 2z + t \end{cases},$$

cioè

$$\mathcal{C}_A = \left\{ \begin{pmatrix} 2z + t & 0 \\ z & t \end{pmatrix}, \text{ con } z, t \in \mathbb{R} \right\};$$

di conseguenza  $\mathcal{C}_A$  ha dimensione 2.

3. Sia

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

il generico endomorfismo di  $\mathbb{R}^2$ ; vogliamo determinare sotto quali condizioni  $\mathcal{C}_A$  ha dimensione 3. Sia, come prima,  $B \in \mathcal{C}_A$  dato dalla matrice (11); calcoliamo il commutatore:

$$AB - BA = \begin{pmatrix} bz - cy & (a - d)y + b(t - x) \\ (d - a)z - c(t - x) & cy - bz \end{pmatrix};$$

quindi  $B \in \mathcal{C}_A$  se e solo se

$$\begin{cases} bz - cy = 0 \\ (a - d)y + b(t - x) = 0 \\ (d - a)z - c(t - x) = 0 \end{cases}, \quad (12)$$

che è un sistema lineare omogeneo nelle incognite  $t - x, z, y$  con matrice dei coefficienti

$$P = \begin{pmatrix} 0 & b & -c \\ b & 0 & a - d \\ -c & d - a & 0 \end{pmatrix}$$

Notiamo che  $|P| = 0$ , per cui il sistema (12) ha sempre soluzioni non nulle. Distinguiamo due casi.

- a) Se  $b = c = a - d = 0$  allora (12) è identicamente nullo, per cui  $\mathcal{C}_A = \text{End}(\mathbb{R}^2)$ ; notiamo che in questo caso  $A$  è della forma

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = aI_2, \quad a \in \mathbb{R}.$$

- b) Se almeno una delle quantità  $b, c, d - a$  è non nulla, allora  $\text{rg}P = 2$  (non può essere 3 perchè  $P$  è singolare); di conseguenza  $\dim \mathcal{C}_A = 2$ ; in effetti si vede facilmente, risolvendo il sistema (12), che

$$\mathcal{C}_A = \left\{ \begin{pmatrix} \mu & \lambda b \\ \lambda c & \mu + \lambda(d - a) \end{pmatrix}, \text{ con } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\};$$

notiamo che i casi  $\dim \mathcal{C}_A = 1, 3$  sono impossibili.

## 1.6 Esercizio 6

Scrivere la matrice (nella base standard di  $\mathbb{R}^3$ ) della proiezione  $P_W^Z$  sulla retta

$$W : \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \quad (13)$$

lungo la giacitura del piano

$$Z : x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \quad (14)$$

**Svolgimento.** Verifichiamo, innanzitutto, che  $W$  e  $Z$  sono in somma diretta.  $Z$  è ovviamente un piano (è descritto da un'equazione non identicamente nulla) e  $W$  è una retta, perchè descritta da due equazioni non proporzionali; quindi i due sottospazi hanno le dimensioni giuste per essere in somma diretta. Resta

da verificare che  $W \cap Z = \{0\}$ . In effetti, basta osservare che  $W \cap Z$  è descritto dal sistema lineare omogeneo (13) + (14), la cui matrice è

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix};$$

essendo  $|M| = -10 \neq 0$ , il sistema ammette solo la soluzione nulla.

Sia  $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  una base di  $V$  tale che  $W = \langle \varepsilon_1 \rangle, Z = \langle \varepsilon_2, \varepsilon_3 \rangle$ . Allora la matrice di  $P_W^Z$  rispetto a  $\mathcal{B}$  è

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

chiaramente, la base  $\mathcal{B}$  non è univocamente determinata, una scelta possibile è, ad esempio:

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

( $\varepsilon_1$  è una soluzione non nulla di (13),  $\varepsilon_2, \varepsilon_3$  sono soluzioni non proporzionali di (14)). Ma allora la matrice di passaggio dalla base da  $\mathcal{B}$  alla base canonica  $C = (e_1, e_2, e_3)$  è

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

d'altra parte, la matrice  $A$  che rappresenta  $P_W^Z$  in  $C$  è legata ad  $\tilde{A}$  dalla relazione

$$A = Q\tilde{A}Q^{-1};$$

resta quindi da calcolare  $Q^{-1}$ :

$$Q^{-1} = -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

Dunque

$$A = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -6 & 3 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Per esercizio, controllate che  $A^2 = A$ . Notate inoltre che le righe di  $A$  sono fra loro proporzionali, in accordo col fatto che deve essere  $rgA = rgP_W^Z = \dim W = 1$ . Infine, notate che  $trA = -(-1 - 6 + 2)/5 = 1$ , in accordo col fatto che la traccia di una proiezione è pari alla dimensione dell'immagine.

## 1.7 Esercizio 7

Sia  $V$  uno spazio vettoriale reale di dimensione 3 e sia  $W \leq V$  un suo piano (cioè  $\dim W = 2$ ). Siano  $R, S \in \text{End}(V)$  due riflessioni rispetto a  $W$ , con  $R \neq S$ . Dire se il sottospazio  $\mathcal{H} = \langle R, S \rangle$  di  $\text{End}(V)$  generato da  $R, S$  contiene altre riflessioni oppure no.

**Svolgimento.** Innanzitutto, scegliamo una base in  $V$  adatta al problema. Precisamente, sia  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  una base di  $V$  tale che i primi due vettori formino una base di  $W$  e il terzo vettore  $e_3$  generi la retta  $\text{Ker}P$ , essendo  $P = 1/2(R + I)$  la proiezione su  $W$  associata a  $R$  [v. mie note su proiezioni e riflessioni]. In tale base,  $R$  è rappresentata dalla matrice

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

(per non appesantire la notazione, indico anche la matrice rappresentativa con  $R$ ). Quanto a  $S$ , la sua matrice rispetto a  $\mathcal{B}$  è della forma

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix},$$

con  $a, b, c$  che devono soddisfare la condizione  $S^2 = I_3$ , cioè [verificatelo]:

$$c^2 = 1, \quad a(1+c) = 0, \quad b(1+c) = 0;$$

escludendo il caso  $c = 1$  (che implicherebbe  $a = b = 0$  e quindi  $S = I_3$ ) rimane la soluzione

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

con  $a, b \in \mathbb{R}$  arbitrari (ma non entrambi nulli, altrimenti sarebbe  $S = R$ ).

Il generico elemento di  $\mathcal{H}$  è della forma

$$F = \lambda R + \mu S,$$

con  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Affinchè  $F$  sia una riflessione è necessario che  $F^2 = I_3$ ; ma

$$\begin{aligned} F^2 &= \lambda^2 R^2 + \mu^2 S^2 + \lambda\mu(RS + SR) \\ &= (\lambda^2 + \mu^2)I_3 + \lambda\mu(RS + SR), \end{aligned}$$

(nell'ultimo passaggio ho applicato a  $R, S$  la proprietà caratteristica delle riflessioni, cioè  $R^2 = S^2 = I$ ). Quindi, se vogliamo che  $F$  sia una riflessione (diversa sia da  $R$  che da  $S$ ), deve valere

$$RS + SR = \frac{(1 - \lambda^2 - \mu^2)}{\lambda\mu} I_3$$

Dunque,  $RS + SR$  è un'omotetia se  $\lambda^2 + \mu^2 \neq 1$ , oppure è l'applicazione identicamente nulla se  $\lambda^2 + \mu^2 = 1$ . Ma dalle (15), (16) segue che

$$RS + SR = 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

quindi certamente  $RS + SR$  non è un'omotetia; d'altra parte, non può neanche essere l'applicazione nulla, perchè sarebbe  $a = b = 0$ , cioè  $R = S$ . In definitiva, in  $\mathcal{H}$  non esistono riflessioni diverse da  $R$  ed  $S$ .

## 2 Esercizi preparatori per la prova intercorso

### 2.1 Esercizio P1

Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} x - \lambda y + 2z & = \mu \\ 3x & - \mu z & = 1 \\ 2x + \lambda y - 2\mu z & = \lambda + \mu \end{cases}, \quad (17)$$

con  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  parametri variabili. Studiare esistenza e unicità delle soluzioni al variare dei parametri.

**Svolgimento.**

La matrice dei coefficienti del sistema (17) è

$$A = A_{\lambda, \mu} = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 2 \\ 3 & 0 & -\mu \\ 2 & \lambda & -2\mu \end{pmatrix},$$

mentre la matrice completa è

$$\tilde{A} = \tilde{A}_{\lambda, \mu} = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 2 & \mu \\ 3 & 0 & -\mu & 1 \\ 2 & \lambda & -2\mu & \lambda + \mu \end{pmatrix}.$$

Per il teorema di Rouché-Capelli, (17) ammette soluzioni se e solo se  $rg A_{\lambda, \mu} = rg \tilde{A}_{\lambda, \mu}$ ; inoltre, le soluzioni sono  $\infty^{3-r}$ , essendo  $r$  il rango comune alle due matrici.

Studiamo il rango di  $A$ . Innanzitutto, esso è sempre non inferiore a 2. Infatti, se  $\mu = 0$ , allora il minore  $A_{1,2}^{1,3} = -6$  è non nullo; se invece  $\mu \neq 0$ , allora a essere non nullo è il minore  $A_{2,3}^{1,3} = -4\mu$ . Quindi  $A$  ha rango 2 se e solo se  $|A| = 0$ . Ma:

$$|A| = 3\lambda(2 - \mu),$$

per cui

$$rg A = 2 \iff \lambda = 0 \quad \text{oppure} \quad \mu = 2$$

Nel primo caso ( $\lambda = 0$ ) la matrice completa è

$$\tilde{A} = \tilde{A}_{0,\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \mu \\ 3 & 0 & -\mu & 1 \\ 2 & 0 & -2\mu & \mu \end{pmatrix}$$

Essa ha rango pari a quello di  $A$  (cioè 2) se e solo se il minore  $\tilde{A}_{1,2,3}^{1,3,4}$  è nullo; ma

$$\tilde{A}_{1,2,3}^{1,3,4} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \mu \\ 3 & -\mu & 1 \\ 2 & -2\mu & \mu \end{vmatrix} = -5\mu^2 - 4\mu + 4,$$

che si annulla solo per

$$\mu_1 = \frac{2}{5}(-1 - \sqrt{6}), \quad \mu_2 = \frac{2}{5}(-1 + \sqrt{6});$$

quindi, se  $\lambda = 0$ , il sistema (17) è compatibile solo per  $\mu = \mu_1, \mu_2$ ; in tal caso, il sistema ammette  $\infty^1$  soluzioni.

Passiamo al caso  $\lambda \neq 0, \mu = 2$ . Allora la matrice completa è

$$\tilde{A} = \tilde{A}_{\lambda,2} = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 2 & 2 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & \lambda & -4 & \lambda + 2 \end{pmatrix};$$

quindi essa ha rango 2 se e solo se si annulla il minore

$$\tilde{A}_{1,2,3}^{1,2,3} = 3\lambda(\lambda + 3),$$

cioè (essendo  $\lambda \neq 0$ ) se e solo se  $\lambda = -3$ . Quindi, nel caso  $\lambda = -3, \mu = 2$  il sistema (17) ammette  $\infty^1$  soluzioni.

Consideriamo infine il caso in cui  $A$  ha rango 3 (che si verifica, per quanto sopra solo se  $\lambda \neq 0, \mu \neq 2$ ). In tal caso, anche  $\tilde{A}$  ha rango 3 (perchè  $3 \geq \text{rg} \tilde{A} \geq \text{rg} A$ ), quindi il sistema (17) ammette esattamente una soluzione.

## 2.2 Esercizio P2

Determinare il complemento ortogonale in  $\mathbb{R}^3$  (col prodotto scalare standard) della retta  $W$  di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \quad (18)$$

**Svolgimento.** Che  $W$  sia una retta segue dal fatto che le due equazioni (18) sono non proporzionali. Quindi  $W^\perp$  è un piano. Per determinarlo, troviamo una base di  $W$ , cioè una soluzione non nulla di (18); ad esempio, ponendo  $x_3 = 1$  e risolvendo rispetto alle altre due variabili si trova:

$$x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = 0,$$

per cui (riscalando) il vettore

$$w = (1, 0, 4)^T$$

è un generatore di  $W$ ; si tratta quindi di determinare tutti i vettori  $x = (x_1, x_2, x_3)^T$  ortogonali a  $w$ , cioè tali che

$$x^T w = x_1 - 4x_3 = 0; \quad (19)$$

la (19) è proprio l'equazione cartesiana di  $W^\perp$ .

### 2.3 Esercizio P3

Determinare la matrice (nella base standard di  $\mathbb{R}^2$ ) dell'applicazione  $F \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$  definita da

$$F(1, 2) = (0, 1), F(1, -1) = (1, -2) \quad (20)$$

**Svolgimento.** Chiamiamo

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (21)$$

essendo questi due vettori indipendenti, e quindi una base di  $\mathbb{R}^2$ , la  $F$  è determinata dai valori che assume su di essi. Chiamando  $\mathcal{B} = (w_1, w_2)$  ed  $\mathcal{S} = (e_1, e_2)$  la base standard,  $P$  la matrice di passaggio da  $\mathcal{S}$  a  $\mathcal{B}$ , si ha che

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1};$$

infatti  $P^{-1}$  è la matrice di passaggio da  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{S}$  e quindi le sue colonne sono le coordinate di  $w_1, w_2$  (cioè le loro componenti in  $\mathcal{S}$ ). Calcoliamo  $P$ :

$$P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$e_1 = \frac{1}{3}(w_1 + 2w_2), \quad e_2 = \frac{1}{3}(w_1 - w_2)$$

Ma allora

$$F(e_1) = \frac{1}{3}(F(w_1) + 2F(w_2))$$

cioè, tenendo conto delle (20), (21),

$$F(e_1) = \frac{1}{3} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -1 \end{pmatrix};$$

analogamente

$$F(e_2) = \frac{1}{3}(F(w_1) - F(w_2)) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix};$$

quindi la matrice di  $F$  nella base standard  $\mathcal{S}$  è

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

## 2.4 Esercizio P4

Sia  $\mathbb{R}^3$  dotato della struttura euclidea standard e sia  $W \leq \mathbb{R}^3$  il piano generato dai vettori  $w_1 = (3, 0, -1)$ ,  $w_2 = (1, 1, 2)$ . Trovare la proiezione ortogonale su  $W$  del vettore  $z = (1, 1, 0)$ .

**Svolgimento.** Bisogna determinare quell'unico vettore  $\tilde{z} \in W$  tale che  $z - \tilde{z} \in W^\perp$ . Innanzitutto,

$$\tilde{z} = \alpha w_1 + \beta w_2, \quad (22)$$

per un'opportuna scelta dei coefficienti  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ; inoltre, basta verificare l'ortogonalità di  $z - \tilde{z}$  con i soli vettori  $w_1, w_2$ , cioè imporre le due condizioni

$$(z - \tilde{z}) \cdot w_i = 0, \quad i = 1, 2$$

che, per la (22), si riscrivono

$$\begin{pmatrix} w_1^2 & w_1 \cdot w_2 \\ w_2 \cdot w_1 & w_2^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \cdot w_1 \\ z \cdot w_2 \end{pmatrix}; \quad (23)$$

la matrice dei coefficienti del sistema (23) è la matrice del prodotto scalare rispetto alla base  $(w_1, w_2)$  e quindi è invertibile; perciò il sistema ha un'unica soluzione, data da:

$$a = \frac{z \cdot (w_2^2 w_1 - (w_1 \cdot w_2) w_2)}{w_1^2 w_2^2 - (w_1 \cdot w_2)^2}, \quad b = \frac{z \cdot (w_1^2 w_2 - (w_1 \cdot w_2) w_1)}{w_1^2 w_2^2 - (w_1 \cdot w_2)^2} \quad (24)$$

sostituiamo i valori numerici (ricordate che  $x \cdot y = x^T y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ ):

$$w_1^2 = 10, w_1 \cdot w_2 = 1, w_2^2 = 6;$$

$$z \cdot w_1 = 3, \quad z \cdot w_2 = 2$$

sostituendo nelle (24) si ottiene

$$a = \frac{6 \cdot 3 - 2}{10 \cdot 6 - 1} = \frac{16}{59}, \quad b = \frac{10 \cdot 2 - 3}{59} = \frac{17}{59}$$

e finalmente

$$\tilde{z} = \frac{16}{59} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{17}{59} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{59} \begin{pmatrix} 65 \\ 17 \\ 50 \end{pmatrix}$$

## 2.5 Esercizio P5

Trovare l'equazione cartesiana del piano  $P \subset \mathbb{R}^3$  contenente i vettori  $w = (1, 1, -1)$ ,  $z = (0, 2, 1)$ .

**Svolgimento.** L'equazione parametrica di  $P$  è

$$x = \lambda w + \mu z, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

ossia, riscrivendo componente per componente,

$$\begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = \lambda + 2\mu \\ x_3 = -\lambda + \mu \end{cases} ;$$

eliminando i parametri, ad esempio, dalla prima e terza equazione e sostituendo nella seconda si ottiene l'equazione cartesiana di  $P$ :

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$$

## 2.6 Esercizio P6

Determinare l'equazione cartesiana del generico piano di  $\mathbb{R}^3$  contenente la retta  $r = \langle w \rangle$ , con  $w = (1, 2, -1)$ .

**Svolgimento.** Chiamiamo  $P$  il generico piano passante per  $w$ ; l'equazione cartesiana di  $P$  è del tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0, \quad (25)$$

con  $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$  da determinare; l'unica condizione da imporre è che le coordinate di  $w$  soddisfino tale equazione:

$$a_1 + 2a_2 - a_3 = 0; \quad (26)$$

quindi, nella (25) i parametri  $a_1, a_2$  si possono scegliere arbitrariamente, mentre  $a_3$  è dato dalla (26):

$$a_1x_1 + a_2x_2 + (a_1 + 2a_2)x_3 = 0. \quad (27)$$

Notiamo che, sebbene ci siano due parametri liberi, in realtà i piani passanti per  $r$  sono solo  $\infty^1$ ; infatti, se invece di prendere  $a_1, a_2$  prendo  $ka_1, ka_2$ , allora la (27) risulta moltiplicata per  $k$  e quindi si ottiene lo stesso piano di prima. In effetti, potremmo porre, ad esempio,  $a = 1$  lasciando variare solo  $a_2$  e ottenere l'equazione

$$x_1 + \lambda x_2 + (1 + 2\lambda)x_3 = 0,$$

che dipende dal solo parametro  $\lambda$  (corrispondente ad  $a_2$ ); in questo modo riusciamo a rappresentare tutti i piani passanti per  $w$  *tranne uno*, quello corrispondente a  $a_1 = 0$ :

$$x_2 + 2x_3 = 0$$

## 2.7 Esercizio P7

Sia  $W \leq \mathbb{R}^3$  la retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad (28)$$

e sia  $Z \leq \mathbb{R}^3$  il piano d'equazione

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \quad (29)$$

Supponendo  $\mathbb{R}^3$  dotato della struttura euclidea standard, determinare:

- a) la proiezione ortogonale  $W'$  di  $W$  su  $Z$ ;
- b) l'angolo fra le rette  $W$  e  $W'$ .

**Svolgimento.** Innanzitutto, ricordiamo che, nella struttura euclidea standard, il prodotto scalare di due vettori (colonna)  $x = (x_1, x_2, x_3)^T, y = (y_1, y_2, y_3)^T$  è dato da

$$x \cdot y \stackrel{\text{def}}{=} x^T y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \quad (30)$$

e che rispetto a tale prodotto la base standard di  $\mathbb{R}^3$  è ortonormale. Determiniamo un generatore della retta  $W$ , cioè un vettore non nullo parallelo a questa retta; ad esempio, ponendo  $x_1 = 1$  nel sistema (28), otteniamo il vettore

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La retta  $W'$  è generata dalla proiezione ortogonale  $w'$  di  $w$  sul piano  $Z$ . Ma

$$w' = w - w'', \quad (31)$$

con  $w''$  proiezione ortogonale di  $w$  sulla retta  $r = Z^\perp$ . Ora, un generatore di  $r$  è il vettore  $\xi = (1, 2, -1)^T$  le cui componenti sono i coefficienti dell'equazione (29) di  $Z$  nella base standard (nella quale, ricordate, il prodotto scalare è espresso dalla formula (30)). Infatti, in una base ortonormale, quale la base standard di  $\mathbb{R}^3$ , il significato geometrico della (29) è: "il vettore  $x = (x_1, x_2, x_3)$  appartiene a  $Z$  se e solo se  $(1, 2, -1) \cdot (x_1, x_2, x_3)^T = 0$ , cioè se e solo se  $x$  è ortogonale a  $\xi$ ". Quindi la proiezione ortogonale di  $w$  su  $r$  è

$$w'' = \frac{w \cdot \xi}{\|\xi\|^2} \xi = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1)}{1^2 + 2^2 + (-1)^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix};$$

quindi dalla (31) si ottiene

$$w' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Passiamo al punto b). L'angolo fra i vettori  $w, w'$  è per definizione quell'unico numero  $\phi \in [0, \pi]$  tale che

$$\cos \phi = \frac{w \cdot w'}{\|w\| \|w'\|},$$

cioè, sostituendo le componenti,

$$\cos \phi = \frac{1}{3} \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} \frac{1}{3} \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$