

# TESINA

Corso di matematiche complementari  
A.A. 2002/03

Argomento: Costruzione campo dei numeri iperreali

*Alessandro Vignes*

## INTRODUZIONE:

La matematica è certezza, sicurezza, è ciò che non lascia spazio a diverse interpretazioni. Alzi la mano chi non è cresciuto con queste convinzioni che ci sono state inculcate fin dai primi anni dei nostri studi scolastici. Non voglio affermare che il mondo matematico sia un universo di barzellette, ricco di falsità. Ma dando uno sguardo alla stessa storia della matematica ci possiamo accorgere che sono esistite ed esistono diverse filosofie della matematica le quali, seppur inquadrare in contesti storici, religiosi, filosofici diversi che hanno finito in molti casi per influenzare il loro sviluppo, sono arrivate a dare risposte differenti a stessi quesiti. Capiamo quindi che questo “castello” di certezza nel quale regna la matematica viene in un certo senso a crollare, a venir giù. Le stesse accese, acerrime dispute, che si sono avute nel corso della storia fra matematici dall’illustre nome, spingono a profonde riflessioni.

L’esempio più recente consiste nell’atteggiamento “ostile” mantenuto da troppi matematici (“conservatori”) nei confronti della cosiddetta *analisi non-standard* e in particolare nei confronti dei numeri **iperreali** che stanno a fondamento di essa.

Non è mai saggio affermare nel corso di una contesa che questo o quell’altro dei contendenti abbia ragione. Vi sono tuttavia contese nelle quali è doveroso schierarsi da una parte ben precisa.

In questo caso il mio pensiero volge contro quei matematici che ho definito prima “conservatori”.

Sarebbe troppo facile giustificare questa presa di posizione soltanto avendo letto qua e là da qualche libro che l’*analisi non-standard* è addirittura riuscita ad ottenere risultati non ancora conseguiti dall’analisi standard e a semplificarne altri (anche se solo questo basterebbe).

Mi chiedo allora: come oggi noi sorridiamo delle credenze pitagoriche sulla centralità dei numeri interi, chi ci dice che tra 1000,2000 anni non rideranno di noi, nell'aver concentrato tutti i nostri sforzi e studi sull'analisi standard?

Alla luce di ciò ,secondo me, oggi più che mai, dispute come quelle pro o contro l'iperreale ,pro o contro il reale e così via discorrendo, rivelano in chi le promuove l'incapacità di riconoscere che il compito della matematica sia quello di scegliere il linguaggio più idoneo per affrontare con rigore , rapidità ed eleganza i problemi che le vengono posti o che essa stessa si pone. Concludendo il mio pensiero in riguardo a queste questioni, dico che le possibilità offerte dall'*analisi non-standard* potranno essere sfruttate a pieno soltanto da una generazione di matematici che non sono immersi e legati come ad una zavorra ai metodi standard. In tal senso mi fortifica una frase tratta dal libro "*Non Standard Analysis*" di **Abraham Robinson** (matematico americano di origine tedesca vissuto nel mezzo del secolo scorso) che dice testualmente:

"Il fatto che questo libro contenga solo applicazioni alla Matematica applicata classica è probabilmente una testimonianza delle limitazioni dell'autore e non del metodo" .

### **Presentazione tesina:**

*In questa tesina il mio scopo non è quello di andare in fondo alle questioni dell'analisi non standard ( sarebbe troppo "orgoglioso" per uno studente come me che sente parlare per la prima volta di questi argomenti) ma di poter "assaggiare", "assaporare" (mi siano consentiti questi termini più legati al mondo gastronomico che ad altro) l'aria che circonda questo nuovo universo misterioso tutto da scoprire. Uno tra gli argomenti che fa al caso nostro è proprio la costruzione del campo dei numeri iperreali che può essere effettuata utilizzando un linguaggio , "costruzioni" strettamente algebriche e introducendo particolari "oggetti" (saranno i filtri e ultrafiltri ).Le prime pagine quindi saranno volte all'introduzione di importanti concetti che ci saranno utili successivamente.*

Scusate, a tal proposito, se non mi dilungo più di tanto su alcuni argomenti introduttivi (ad esempio non specificherò la definizione di gruppo, sottogruppo, anello, sottoanello etc.) .Questo per arrivare con il minor tempo possibile e la minor quantità di “inchiostro” al nocciolo della situazione.

### **SULLE RELAZIONI D'EQUIVALENZA:**

Consideriamo un insieme  $S$  “munito” di una operazione interna  $\perp$  in termini tecnici si parlerà della *struttura algebrica*  $S(\perp)$ . Sia poi  $R$  una relazione d'equivalenza (riflessiva, simmetrica e transitiva) in  $S$ . Sappiamo che in generale ha senso parlare di classi di equivalenza che indicheremo con tale simbologia  $[x]_R$  dove  $\forall x \in S \quad [x]_R = \{ y \in S : x R y \}$

Esprimeremo poi con  $S/R = \{ [x]_R : x \in S \}$  l'insieme delle classi d'equivalenza detto anche *insieme quoziente* di  $S$  rispetto ad  $R$ .

Istintivamente saremmo tentati a considerare la seguente operazione tra classi d'equivalenza:

$$[x]_R \perp' [y]_R = [x \perp y]_R \text{ commettendo però un grave errore infatti:}$$

$$\text{Siano } [x]_R = [x']_R \text{ e } [y]_R = [y']_R$$

Per essere ben posta l'applicazione  $\perp'$  dovremmo avere che:

$$[x]_R \perp' [y]_R = [x']_R \perp' [y']_R \Leftrightarrow [x \perp y]_R = [x' \perp y']_R \Leftrightarrow \text{gli elementi } x \perp y \text{ e } x' \perp y' \text{ sono in}$$

relazione. Ma questo chi ce lo assicura ?

Ci serve che  $R$  sia una *congruenza* di  $S$  rispetto a  $\perp$  oppure equivalentemente che sia *compatibile* con  $\perp$ . Tutto questo si esprime dicendo che:

$$\forall x, x', y, y' \in S \quad \text{se } x R x' \text{ e } y R y' \Rightarrow x \perp y R x' \perp y'$$

### **SUGLI ANELLI:**

Sappiamo tutti cosa è in generale un anello  $A(+, \bullet)$ .

Ricordiamo in particolare poi che un **ideale bilatero**  $H$  (con  $H$  diverso dal vuoto) di  $A$  è un “particolare” sottoanello di  $A$  (da osservare che in generale non vale il viceversa cioè un sottoanello non è un ideale bilatero) che gode delle seguenti proprietà:

1.  $H(+)$   $\leq$   $A(+)$  (cioè è un sottogruppo del gruppo additivo  $A(+)$ )

$$2. a \in A \quad h \in H \Rightarrow a \bullet h, h \bullet a \in H$$

Vogliamo ora passare al quoziente dell'anello  $A (+, \bullet)$  rispetto ad una relazione d'equivalenza  $R$ . Consideriamo, a tal fine, una relazione  $R$  d'equivalenza in  $A$ .

Dalla teoria dei gruppi ricordiamo che:

$$R \text{ è compatibile con } + \Leftrightarrow \exists H (+) \leq A (+) : R = R'_H = R''_H$$

(Se accadeva che  $R'_H = R''_H$  il sottogruppo  $H$  di  $A$  lo dicevamo *normale* in  $A$ ).

Dove  $R'_H$  e  $R''_H$  erano relazioni in  $A$  così definite:

$$\text{Siano } x, y \in A \quad x R'_H y \Leftrightarrow -x + y \in H$$

(Se accadeva che  $R'_H = R''_H$  il sottogruppo  $H$  di  $A$  lo dicevamo *normale* in  $A$ ).

Dove  $R'_H$  e  $R''_H$  erano relazioni in  $A$  così definite:

$$\text{Siano } x, y \in A \quad x R'_H y \Leftrightarrow -x + y \in H$$

$$x R''_H y \Leftrightarrow x - y \in H$$

In tali condizioni aveva senso considerare (ponendo  $H = R = R'_H = R''_H$ ) l'insieme quoziente:

$$A / R = A / H = \{ x + H : x \in A \} \quad \text{dove uso la comoda notazione } x + H := [x]_R$$

$$\text{Quindi avremo che } x + H = y + H \Leftrightarrow [x]_R = [y]_R \Leftrightarrow x R y \Leftrightarrow x - y \in H$$

Sfruttando poi la compatibilità aveva senso considerare la seguente operazione interna in  $A / H$

$$\text{Ponendo: } (x + H) + (y + H) = x + y + H \quad (\text{cioè } [x]_R + [y]_R = [x + y]_R)$$

E si parlava di *gruppo quoziente*  $A / H (+)$ . Dove banalmente si può verificare che:

- l'elemento neutro rispetto a  $+$  era  $0 + H = H$
- l'opposto di  $(x + H) \in A / H$  è l'elemento  $-x + H$

OSS: da notare l'abuso di notazione effettuato avendo indicato con lo stesso simbolo  $+$ , le operazioni interne in  $A$  e  $A / H$ .

Attenzione! Ora ci servirà anche la compatibilità di  $R$  con  $\bullet$  ( entreranno in gioco gli ideali bilateri).

A tal proposito vale la seguente equivalenza:

$$R \text{ compatibile con } \bullet \Leftrightarrow \exists H \text{ ideale bilatero di } A : R = R_H$$

Quindi partendo da  $H$  ideale bilatero ,sfruttando la compatibilità di  $R$  con  $\bullet$  , ha senso introdurre in  $A / H$  l'operazione interna  $\bullet$  così definita:

$$(x + H) \bullet (y + H) = x \bullet y + H \quad (\text{cioè } [x]_R \bullet [y]_R = [x \bullet y]_R)$$

Si può verificare facilmente che  $A / H$  ( $+$ ,  $\bullet$ ) è un anello chiamato *anello quoziente*.

(Da notare ancora una volta l'abuso di notazione stavolta usando il simbolo  $\bullet$  per due scopi differenti).

OSS: Si noti in particolare che se  $A$  è un anello unitario( cioè  $1 \in A$  ) allora lo è anche  $A / H$  dove l'unità è banalmente  $1 + H$ . Così se si parte da  $A$  anello commutativo allora lo è anche  $A / H$ .

## Filtri e Ultrafiltri

Consideriamo  $I$  insieme non vuoto.

**Definizione:** Un filtro su  $I$  è una collezione non vuota  $\mathcal{U}$  di sottoinsiemi di  $I$  (quindi  $\mathcal{U} \subseteq P(I)$ ) avente le seguenti proprietà:

i)  $\emptyset \notin \mathcal{U}$

ii)  $A, B \in \mathcal{U} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{U}$  (in particolare per la i) si ha che  $A \cap B \neq \emptyset$ )

iii)  $A \in \mathcal{U} \quad B \in P(I) \text{ con } A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{U}$

OSS 1: se  $\mathcal{U}$  è un filtro su  $I \Rightarrow I \in \mathcal{U}$  ( per la iii) )

OSS 2: Due sottoinsiemi disgiunti di  $I$  non possono appartenere entrambi ad  $\mathcal{U}$  (per la i) e ii) )

**Definizione:** Un filtro  $\mathcal{U}$  su  $I$  è un ultrafiltro se vale la seguente proprietà (\*):

$$(*) \quad A \in P(I) \Rightarrow A \in \mathcal{U} \quad \text{opp} \quad I \setminus A \in \mathcal{U} \quad (\text{non entrambe per la i) e ii) )}$$

(a livello intuitivo si può pensare ad un ultrafiltro come ad una famiglia abbastanza grande di sottoinsiemi ma non troppo grande al momento che non può contenere insiemi disgiunti)

**Esempio:** sia  $I \neq \emptyset$  un insieme. Dato  $a \in I$  la collezione  $\mathcal{U}_a = \{A \subseteq I : a \in A\}$  è un ultrafiltro su  $I$  (è banale far vedere che valgono le 4 proprietà degli ultrafiltri cioè i), ii), iii) e (\*) )

**Definizione:** sia  $I$  un insieme infinito. La collezione  $\mathcal{U}_1 = \{A \subseteq I : I \setminus A \text{ è finito}\}$  è un filtro chiamato Filtro cofinito (osserviamo che i suoi elementi sono proprio i cofiniti)

**Definizione:** Un ultrafiltro  $\mathcal{U}$  su un insieme  $I$  infinito si dice libero se contiene  $\mathcal{U}_1$

**OSS:** un ultrafiltro libero  $\mathcal{U}$  su  $I$  non può contenere nessun insieme finito.

Infatti se per assurdo  $A \in \mathcal{U}$  con  $A$  finito in particolare avremmo che  $A' = I \setminus A \in \mathcal{U}$  essendo cofinito. Ora sfruttando la proprietà ii) dei filtri (e in particolare degli ultrafiltri) si avrebbe che  $A \cap A' = \emptyset \in \mathcal{U}$  il che è un assurdo per la proprietà i) dei filtri. Ne deduciamo quindi la veridicità dell'osservazione su esposta.

Gli ultrafiltri liberi saranno fondamentali per i nostri scopi, ma chi ci assicura che gli ultrafiltri liberi esistono?

Per arrivare a dimostrare l'esistenza degli ultrafiltri liberi passeremo attraverso il *LEMMA di ZORN*

Ricordiamo a tal proposito che:

Un insieme ordinato è una coppia  $(S, \leq)$  dove  $S$  è un insieme e  $\leq$  una relazione binaria in  $S$  riflessiva, asimmetrica e transitiva (da osservare che più in generale al posto di  $\leq$  si utilizza il simbolo  $R$  o  $<$  indicante sempre una relazione binaria in  $S$  che sia antiriflessiva e transitiva denominata *relazione d'ordine*).

Dicesi poi che  $(S, <)$  è totalmente ordinato o che  $<$  è una relazione d'ordine totale se comunque presi  $x, y \in S$  allora  $x < y$  opp  $y < x$  (cioè sono in relazione)

$(S, <)$  è un insieme ordinato induttivo se ogni parte non vuota di  $S$ , totalmente ordinata è superiormente limitata.

Dopo aver dato queste semplici definizioni possiamo esplicitare quello che va sotto il nome di Lemma di Zorn.

**LEMMA di ZORN:** Sia  $(S, \leq)$  un insieme ordinato induttivo. Allora esiste un elemento massimale  $m \in S$  tale che  $x \leq m$ . per ogni  $x \in S$ .

Teorema: sia  $\mathcal{W}$  un filtro su  $I$  allora esiste un ultrafiltro  $\mathcal{U}$  su  $I$  che contiene  $\mathcal{W}$

Dimostrazione: consideriamo il seguente insieme:  $\Omega = \{ \mathcal{V} \text{ filtri su } I : \mathcal{V} \supseteq \mathcal{W} \}$

Ordiniamo rispetto all'inclusione tale insieme cioè diremo che:

$$X \leq Y \Leftrightarrow X \subseteq Y \quad (\text{naturalmente con } X, Y \text{ elementi di } \Omega)$$

Banalmente, con tale relazione, abbiamo costruito un insieme ordinato  $(\Omega, \leq)$ .

Dimostriamo ora (ai fini di poter applicare il lemma di Zorn) che è anche induttivo.

Dovremo far vedere che preso comunque  $\Sigma \subseteq \Omega$  con  $\Sigma \neq \emptyset$  e totalmente ordinato esso è superiormente limitato. (Ci basterà trovare un maggiorante di  $\Sigma$  in  $\Omega$ ).

Innanzitutto essendo  $\Sigma$  un sottoinsieme di  $\Omega$  sarà fatto in questo modo:  $\Sigma = \{ X_j \in \Omega : j \in J \}$

E' banale far vedere che l'insieme  $\bigcup_{j \in J} X_j$  è un maggiorante di  $\Sigma$  appartenente a  $\Omega$  infatti:

è un maggiorante poiché  $\forall \mathcal{V} \in \Sigma \quad \mathcal{V} \subseteq \bigcup_{j \in J} X_j$  (ovvio perché  $\mathcal{V}$  fa parte di quell'unione)

ci rimane da provare che  $\bigcup_{j \in J} X_j \in \Omega$  :

innanzitutto  $\bigcup_{j \in J} X_j \supseteq \mathcal{W}$  ovviamente poiché  $X_j \in \Omega \quad \forall j \in J$

Ci rimane da provare (per l'induttività) che  $\bigcup_{j \in J} X_j$  è un filtro su  $I$  :

Vediamo se valgono le 3 proprietà che caratterizzano i filtri:

essendo  $X_j$  filtri  $\forall j \in J$  in particolare  $\Rightarrow$  (per i)  $\emptyset \notin X_j \quad \forall j \in J \Rightarrow \emptyset \notin \bigcup_{j \in J} X_j$  quindi vale la i)

siano ora  $A, B \in \bigcup_{j \in J} X_j \Rightarrow \exists i, j \in J : A \in X_i, B \in X_j$

Sfruttando che  $\Sigma$  e' totalmente ordinato si ha che  $X_i \subseteq X_j$  opp  $X_j \subseteq X_i$

quindi si ha che  $A, B \in X_i$  opp  $A, B \in X_j$

Ora senza ledere in generalità supponiamo che valga una delle due ad esempio:

$A, B \in X_i \Rightarrow$  (per ii)  $A \cap B \in X_i \Rightarrow A \cap B \in \bigcup_{j \in J} X_j$  quindi vale anche la ii)

Sia adesso  $A \in \bigcup_{j \in J} X_j \quad B \in \mathcal{P}(I)$  con  $A \subseteq B \Rightarrow \exists i \in J : A \in X_i \quad B \in \mathcal{P}(I)$  con  $A \subseteq B \Rightarrow$

$\Rightarrow$  (per iii)  $B \in X_i \Rightarrow B \in \bigcup_{j \in J} X_j$  quindi vale anche la iii)

In definitiva  $\bigcup_{j \in J} X_j$  è un filtro su  $I$  e quindi  $(\Omega, \leq)$  è anche induttivo.

Applicando ora il lemma di Zorn abbiamo che  $(\Omega, \leq)$  contiene un elemento massimale che chiameremo con  $M$  e proveremo che tale è l'ultrafiltro su  $I$  cercato che contiene  $w$ .

Innanzitutto siccome  $M \in \Omega$  in particolare è un filtro su  $I$  che contiene  $w$  (per come definito  $\Omega$ )  
Ci rimane da provare che  $M$  è un ultrafiltro e in particolare solo la proprietà (\*) (siccome già sappiamo che è un filtro).

A tal proposito sia  $A \in P(I)$ :

Se  $A \in M$  la (\*) è immediatamente verificata.

Supponiamo invece ora che  $A \notin M$  la nostra tesi sarà quella di far vedere che  $A' = I \setminus A \in M$ .

Consideriamo quindi il seguente insieme:  $G = \{X \subseteq I : A \cap M \subseteq X \text{ per qualche } M \in M\}$ .  
Osserviamo banalmente che  $M \subseteq G$  infatti :

Preso comunque  $M_0 \in M$  in particolare  $M_0 \subseteq I$  e  $A \cap M_0 \subseteq M_0$  e quindi  $M_0 \in G$ .

Inoltre  $M \neq G$  infatti  $A \in G$  poichè  $A \subseteq I$  e  $A \cap M \subseteq A \forall M \in M$  e stiamo nel caso  $A \notin M$   
Quindi c'è l'inclusione stretta cioè  $M \subset G$ .

Essendo  $M$  massimale (rispetto all'inclusione) in  $\Omega$  quindi  $G$  non può essere un filtro su  $I$ .

Ma  $G$  soddisfa la ii) e iii) dei filtri infatti:

se  $X, Y \in G \Rightarrow X \supseteq A \cap M_0$  e  $Y \supseteq A \cap M_1$  con  $M_0, M_1 \in M$

essendo  $M$  filtro  $M_0 \cap M_1 \in M$ .

Osservando poi che  $X \cap Y \supseteq A \cap (M_0 \cap M_1) \Rightarrow X \cap Y \in G$  e quindi  $G$  gode della ii) dei filtri

sia poi  $X \in G$  e  $B \in P(I)$  con  $X \subseteq B$

innanzitutto dire  $X \in G \Rightarrow A \cap M \subseteq X (\subseteq B)$  per qualche  $M \in M \Rightarrow B \in G$  e quindi vale anche la iii) dei filtri in  $G$ .

Ma abbiamo detto che  $G$  non è un filtro quindi valendo la ii) e la iii) in  $G$  ne deduciamo che per forza in  $G$  non varrà la proprietà i) dei filtri e cioè quindi che in particolare  $\emptyset \in G$ .

Ma dire che  $\emptyset \in G \Rightarrow \emptyset \supseteq A \cap M$  con  $M \in M \Rightarrow A \cap M = \emptyset \Rightarrow M \subseteq A' = I \setminus A \Rightarrow$  (per iii)  $A' = I \setminus A \in M$

Come volevasi dimostrare.

COROLLARIO : Gli ultrafiltri liberi esistono su ogni insieme infinito  $I$

Dimostrazione: basta considerare il filtro cofinito  $\mathcal{U}_1$ . Dal teorema precedente esiste un ultrafiltro  $\mathcal{U}$  che contiene  $\mathcal{U}_1$ . Tale ultrafiltro è libero per definizione.

/-----/

Possiamo ora finalmente passare alla "costruzione" dei numeri iperreali.

## NUMERI IPERREALI

Consideriamo la seguente struttura algebrica:  $(\mathfrak{R}^N, +, \bullet)$

Dove  $\mathfrak{R}^N$  indica l'insieme delle successioni di reali che possiamo esplicitare in questi 2 modi:

$$\mathfrak{R}^N = \{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} : a_n \in \mathfrak{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \} = \{ a : \mathbb{N} \rightarrow \mathfrak{R} \text{ applicazioni} \}$$

Dove identificando  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  con  $a$  si ha che il generico elemento  $a_n$  della successione  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  non è altro che  $a(n)$  immagine di  $n$  tramite l'applicazione  $a$ .

Definiamo ora le due leggi interne in  $\mathfrak{R}^N$  i cui elementi li indicheremo usando, fra quelle indicate in precedenza, la notazioni che più si presta ad un uso pratico:

$$+ \quad \forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{R}^N \quad \text{poniamo} \quad (a_n)_{n \in \mathbb{N}} + (b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\text{dove } (c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{R}^N \quad \text{con } c_m = a_m + b_m \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

(Da sottolineare l'abuso di notazione effettuato identificando con lo stesso simbolo (+) l'"usuale" addizione in  $\mathfrak{R}$  e quella appena definita in  $\mathfrak{R}^N$ ; ciò per non introdurre una simbologia che andasse ad appesantire troppo tutto il discorso)

$$\bullet \quad \forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{R}^N \quad \text{poniamo} \quad (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \bullet (b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\text{dove } (c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{R}^N \quad \text{con } c_m = a_m \bullet b_m \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

(Da sottolineare ancora una volta l'abuso di notazione stavolta utilizzando il simbolo  $\bullet$  per indicare sia l'"usuale" prodotto in  $\mathfrak{R}$  che quello appena definito in  $\mathfrak{R}^N$ ).

D'ora in poi quando parlerò di somma e prodotto fra due successioni di  $\mathfrak{R}^N$  mi starò riferendo rispettivamente alla prima e alla seconda operazione definita nella struttura  $(\mathfrak{R}^N, +, \bullet)$ .

Rispetto a tali operazioni  $\mathfrak{R}^N$  è un ANELLO commutativo, unitario infatti si può facilmente provare che

- $\mathfrak{R}^N (+)$  è un gruppo abeliano
  - $\bullet$  è associativa
  - $\bullet$  è distributiva rispetto a  $+$
  - $\bullet$  è commutativa
- Si dimostrano facilmente sfruttando le proprietà dell'anello dei reali  $\mathfrak{R} (+, \bullet)$  (anzi è un campo!!!)

L'elemento neutro rispetto a  $+$  è la successione con tutti 0 (che chiameremo successione nulla e la indicheremo semplicemente con il simbolo 0).

L'unità è banalmente la successione con tutti 1 (che indicheremo semplicemente con il simbolo 1).



Quindi si tratta effettivamente di divisori dello 0.

Adesso ci vengono in aiuto quegli "strani" oggetti definiti prima: filtri e ultrafiltri.

Definiamo, a tal proposito ora, la seguente relazione d'equivalenza in  $\mathfrak{R}^N$ :

$$\forall (a_n)_{n \in N}, (b_n)_{n \in N} \in \mathfrak{R}^N \text{ dirò che } (a_n) \equiv (b_n) \Leftrightarrow \{n \in N : a_n = b_n\} \in \mathcal{U}$$

Dove  $\mathcal{U}$  è un filtro su  $N$  (l'esistenza di un tal filtro l'abbiamo provata in precedenza in generale) e l'appartenenza ad  $\mathcal{U}$  dell'insieme sopra espresso la potremmo indicare dicendo che  $(a_n)_{n \in N}$  e  $(b_n)_{n \in N}$  sono quasi ovunque uguali.

Il fatto che  $\equiv$  sia una relazione d'equivalenza è facile da dimostrare sfruttando le proprietà dei filtri:

- riflessività: sia  $(a_n)_{n \in N} \in \mathfrak{R}^N$  allora  $(a_n) \equiv (a_n) \Leftrightarrow \{n \in N : a_n = a_n\} = N \in \mathcal{U}$   
Siccome c'è la veridicità sul fatto che  $N \in \mathcal{U}$  in particolare vale la riflessività.

- Simmetricità: OVVIA

- Transitività: siano  $(a_n)_{n \in N}, (b_n)_{n \in N}, (c_n)_{n \in N} \in \mathfrak{R}^N$  con  $(a_n) \equiv (b_n)$  e  $(b_n) \equiv (c_n)$

$$\text{quindi } \{n \in N : a_n = b_n\} \in \mathcal{U}, \{n \in N : b_n = c_n\} \in \mathcal{U} \Rightarrow \{n \in N : a_n = b_n\} \cap \{n \in N : b_n = c_n\} \in \mathcal{U}$$

ora siccome banalmente  $\{n \in N : a_n = b_n\} \cap \{n \in N : b_n = c_n\} \subseteq \{n \in N : a_n = c_n\} \Rightarrow \{n \in N : a_n = c_n\} \in \mathcal{U} \Rightarrow (a_n) \equiv (c_n)$  e quindi vale la transitività.

(Nelle due ultime implicazioni ho sfruttato rispettivamente la ii) e iii) dei filtri)

Vediamo ora se  $\equiv$  rappresenta una congruenza di  $\mathfrak{R}^N$  rispetto alle due operazioni interne o equivalentemente se è compatibile con esse.

Quindi prese comunque  $(a_n) \equiv (a'_n)$  e  $(b_n) \equiv (b'_n)$  TESI: 1)  $(a_n) + (b_n) \equiv (a'_n) + (b'_n)$   
2)  $(a_n) \cdot (b_n) \equiv (a'_n) \cdot (b'_n)$

Per snellire la dimostrazione pongo:

$$A = \{n \in N : a_n = a'_n\}$$

$$B = \{n \in N : b_n = b'_n\}$$

$$C = \{n \in N : a_n + b_n = a'_n + b'_n\}$$

$$D = \{n \in N : a_n \cdot b_n = a'_n \cdot b'_n\}$$

DIM1: per ipotesi so che  $A, B \in \mathcal{U} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{U}$

ora sicuramente  $A \cap B \subseteq C \Rightarrow C \in \mathcal{U} \Rightarrow (a_n + b_n) \equiv (a'_n + b'_n)$

$(a_n) + (b_n) \equiv (a'_n) + (b'_n)$

DIM2: per ipotesi so che  $A, B \in \mathcal{U} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{U}$

sicuramente  $A \cap B \subseteq D \Rightarrow D \in \mathcal{U} \Rightarrow (a_n \bullet b_n) \equiv (a'_n \bullet b'_n) \Rightarrow (a_n) \bullet$

$(b_n) \equiv (a'_n) \bullet (b'_n)$

Finalmente posso ora passare al quoziente avendo introdotto una relazione d'equivalenza. Ma, per utilizzare un modo originale, posso proseguire introducendo il solito ideale bilatero (è facile provare che lo sia) di  $(\mathfrak{R}^N, +, \bullet)$ :

$$H = \{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{R}^N : (a_n) \equiv 0 \}$$

Passando al quoziente  $\mathfrak{R}^N / H = \{ (a_n) + H : (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{R}^N \}$  sappiamo che sono definite così le due operazioni interne  $+$ ,  $\bullet$  (sempre con abuso di notazione avendo indicato così anche quelle interne a  $\mathfrak{R}^N$ ):

$$((a_n) + H) + ((b_n) + H) = (a_n) + (b_n) + H = (a_n + b_n) + H$$

$$((a_n) + H) \bullet ((b_n) + H) = (a_n) \bullet (b_n) + H = (a_n \bullet b_n) + H \quad \text{naturalmente } \forall$$

$$(a_n) + H, (b_n) + H \in \mathfrak{R}^N / H$$

Ancora una volta però ci troviamo di fronte al problema che  $\mathfrak{R}^N / H$  potrebbe non essere un campo. Infatti basta osservare che ci potrebbe essere la presenza di divisori dello zero.

Consideriamo infatti le solite due successioni reali:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{R}^N : a_{2n} = 1 \text{ e } a_{2n-1} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad 0101010101 \dots$$

$$(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{R}^N : b_{2n} = 0 \text{ e } b_{2n-1} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad 1010101010 \dots$$

Osserviamo che  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  non possono appartenere entrambi ad  $H$  altrimenti avremmo la presenza in  $\mathcal{U}$  di due insiemi disgiunti (cioè l'insieme dei numeri naturali pari e quello dei dispari).

Quindi  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \notin H$  opp  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \notin H \Rightarrow (a_n) + H \neq H$  opp  $(b_n) + H \neq H$ .

Nel caso in cui le ultime due relazioni dovessero valere entrambe saremmo in presenza di divisori dello 0 osservando infatti poi banalmente che:

$$((a_n) + H) \bullet ((b_n) + H) = (a_n) \bullet (b_n) + H = H$$

Per superare definitivamente l'ostacolo divisori dello 0 basterà considerare, al posto di un "semplice" filtro su  $\mathbb{N}$ , un **ultrafiltro libero**  $\mathcal{U}$  su  $\mathbb{N}$  (di cui siamo certi dell'esistenza) e ripetere la costruzione di  $\mathfrak{R}^N / H$  in modo analogo.

Analizziamo prima il perché siamo certi della non presenza di divisori dello 0 e poi far vedere che  $\mathfrak{R}^N / H$  è un campo.

Siano quindi  $(a_n) + H, (b_n) + H \in \mathfrak{R}^N / H$  t.c.  $((a_n) + H) \bullet ((b_n) + H) = H$

TESI:  $(a_n) + H = H$  opp  $(b_n) + H = H$  (in modo da scongiurare la presenza di divisori dello 0).

Per ipotesi  $((a_n) + H) \bullet ((b_n) + H) = H \Rightarrow (a_n) \bullet (b_n) + H = H \Rightarrow (a_n \bullet b_n) + H = H \Rightarrow (a_n \bullet b_n) \in H \Rightarrow$

$$\Rightarrow (a_n \bullet b_n) \equiv 0 \Rightarrow \{n : a_n \bullet b_n = 0\} \in \mathcal{U}$$

Essendo  $\mathbb{R}$  un campo (quindi non ha divisori dello 0)  $a_n \bullet b_n = 0 \Rightarrow a_n = 0$  opp  $b_n = 0$

Quindi  $\{n \in \mathbb{N} : a_n \bullet b_n = 0\} = \{n \in \mathbb{N} : a_n = 0\} \cup \{n \in \mathbb{N} : b_n = 0\} \in \mathcal{U} \Rightarrow$  (vedi OSS\*\* di sotto)

$\Rightarrow \{n \in \mathbb{N} : a_n = 0\} \in \mathcal{U}$  opp  $\{n \in \mathbb{N} : b_n = 0\} \in \mathcal{U} \Rightarrow (a_n) \equiv 0$  opp  $(b_n) \equiv 0 \Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H$   
opp  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H \Rightarrow (a_n) + H = H$  opp  $(b_n) + H = H$  come volevasi dimostrare.

OSS\*\*: Facciamo ora vedere che è possibile effettuare quel passaggio nella dimostrazione:

supponiamo che  $A \cup B \in \mathcal{U}$  (ricordiamo che  $\mathcal{U}$  è un ultrafiltro)

proveremo che se  $A \notin \mathcal{U}$  allora per forza  $B \in \mathcal{U}$

siccome stiamo supponendo che  $A \notin \mathcal{U} \Rightarrow$  (per \*)  $-A \in \mathcal{U}$  (cioè il complementare appartiene ad  $\mathcal{U}$ )

per (ii) dei filtri allora  $-A \cap (A \cup B) \in \mathcal{U} \Rightarrow B \in \mathcal{U}$  (per la iii) siccome  $-A \cap (A \cup B) \subseteq B$ )

Ritornando a noi abbiamo fatto vedere quindi che l'anello quoziente  $\mathfrak{R}^N / H (+, \bullet)$  non ha divisori dello 0. Proviamo allora che finalmente siamo arrivati alla costruzione di un campo.

Sappiamo in generale che sfruttando il fatto che siamo partiti da un anello commutativo, unitario ( $\mathfrak{R}^N, +, \bullet$ ) è facile far vedere che il quoziente costruito  $\mathfrak{R}^N / H (+, \bullet)$  sarà un anello commutativo, unitario. Ora per essere un campo  $\mathfrak{R}^N / H (+, \bullet)$  ci basterà far vedere che ogni elemento diverso da 0 ha inverso cioè:

Sia  $(a_n) + H \neq H$  e facciamo vedere che  $\exists (a'_n) + H \in \mathfrak{R}^N / H : ((a_n) + H) \bullet ((a'_n) + H) = 1 + H$

Innanzitutto dire che  $(a_n) + H \neq H \Rightarrow (a_n) \notin H \Rightarrow \{n \in \mathbb{N} : a_n = 0\} \notin \mathcal{U} \Rightarrow \{n : a_n \neq 0\} \in \mathcal{U}$  (per \*)

Definiamo ora  $(a'_n) + H \in \mathfrak{R}^N / H$  con  $a'_n = 1/a_n$  se  $a_n \neq 0$  e  $a'_n = 0$  se  $a_n = 0$ .

E' facile verificare che  $((a_n) + H) \bullet ((a'_n) + H) = 1 + H$  :

Infatti basta osservare che  $\{n \in \mathbb{N} : a_n \bullet a'_n = 1\} = \{n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0\} \in \mathcal{U}$

**DEFINIZIONE:** gli elementi di  $\mathfrak{R}^N / H$  verranno chiamati numeri iperreali e dunque siamo così arrivati alla costruzione di  $\mathfrak{R}^N / H (+, \bullet)$  **CAMPO DEI NUMERI IPERREALI**

Convenzioni notazionali: d'ora in poi indicheremo il campo dei numeri iperreali con il simbolo  $\mathfrak{R}^*$  e un suo generico elemento  $(a_n) + H$  con il semplice simbolo "a".

Definizione:  $\forall a, b \in \mathfrak{R}^*$  poniamo  $a < b \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : a_n < b_n\} \in \mathcal{U}$

$\forall a, b \in \mathfrak{R}^*$  poniamo  $a \leq b \Leftrightarrow a < b$  opp  $a = b$

Verifichiamo ora se la definizione precedente è ben posta (cioè che non dipende dai particolari rappresentanti che si vanno a scegliere) :

$\forall a, b, a', b' \in \mathfrak{R}^*$  con  $a = a', b = b', a < b$  TESI:  $a' < b'$

Dim: per ipotesi  $(a_n)+H=(a'_n)+H \Leftrightarrow (a_n)-(a'_n) \in H \Leftrightarrow (a_n - a'_n) \in H \Leftrightarrow (a_n - a'_n) \equiv 0 \Leftrightarrow \{n : a_n - a'_n = 0\} \in \mathcal{U}$

In modo analogo siccome per ipotesi  $(b_n)+H=(b'_n)+H \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : b_n - b'_n = 0\} \in \mathcal{U}$

Ancora per ipotesi siccome  $a < b \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : a_n < b_n\} \in \mathcal{U}$

La nostra tesi è quella di far vedere che  $a' < b'$  cioè equivalentemente che  $\{n \in \mathbb{N} : a'_n < b'_n\} \in \mathcal{U}$

Ma  $\{n \in \mathbb{N} : a'_n < b'_n\} \supseteq \{n \in \mathbb{N} : a_n - a'_n = 0\} \cap \{n \in \mathbb{N} : b_n - b'_n = 0\} \cap \{n \in \mathbb{N} : a_n < b_n\} \in \mathcal{U} \Rightarrow \{n \in \mathbb{N} : a'_n < b'_n\} \in \mathcal{U}$  come volevasi dimostrare.

PROPOSIZIONE:  $(\mathfrak{R}^*, <)$  rappresenta un insieme ordinato.

DIM: proviamo quindi che  $<$  è una relazione d'ordine facendo vedere che è antiriflessiva e transitiva:

- Antiriflessività: sia  $a \in \mathfrak{R}^*$   $\{n \in \mathbb{N} : a_n < a_n\} = \emptyset \notin \mathcal{U}$  e quindi non vale che  $a < a$
- Transitività: sia  $a < b$  e  $b < c \Rightarrow \{n \in \mathbb{N} : a_n < b_n\} \in \mathcal{U}$  e  $\{n \in \mathbb{N} : b_n < c_n\} \in \mathcal{U}$   
 Ora  $\{n : a_n < c_n\} \supseteq \{n : a_n < b_n\} \cap \{n : b_n < c_n\} \in \mathcal{U} \Rightarrow \{n : a_n < c_n\} \in \mathcal{U} \Rightarrow a < c$

(DICOTOMIA) Vale inoltre che se  $a, b \in \mathfrak{R}^*$  allora  $a \leq b$  opp  $b \leq a$

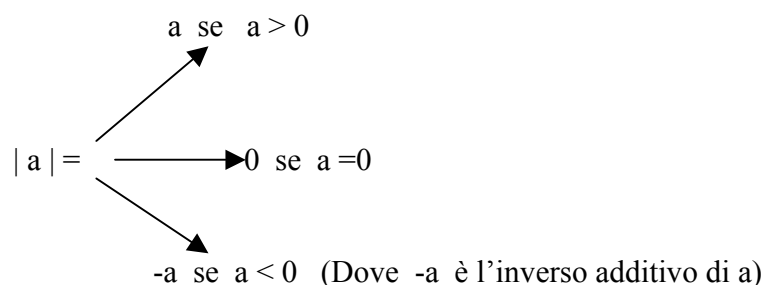
dimostrazione: Poniamo  $A = \{n \in \mathbb{N} : a_n < b_n\}$   $B = \{n \in \mathbb{N} : b_n < a_n\}$   $C = \{n \in \mathbb{N} : a_n = b_n\}$   
 se dimostriamo che uno ed uno solo degli A,B,C appartiene ad  $\mathcal{U}$  la dicotomia è ovviamente verificata.

Innanzitutto sono tre insiemi disgiunti e inoltre  $A \cup B \cup C = \mathbb{N} \in \mathcal{U}$ .

Il fatto poi che almeno uno di loro appartiene ad  $\mathcal{U}$  deriva dalla OSS\*\*.

L'unicità invece deriva direttamente dalla i) e ii) dei filtri.

**Definizione:** sia  $a \in \mathfrak{R}^*$  allora:



Possiamo chiamarlo valore assoluto non-standard di "a" dato che ci ricorda quello "standard".

Vogliamo ora far vedere che il campo dei numeri reali  $\mathfrak{R}$  può essere immerso in  $\mathfrak{R}^*$  o detto in termini più "nobili" che  $\mathfrak{R}^*$  contiene un sottocampo isomorfo ad  $\mathfrak{R}$ .

Definiamo a tal scopo la seguente funzione:

$$f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}^* \text{ ponendo } \forall r \in \mathfrak{R} \quad f(r) = {}^*r \text{ dove } {}^*r = (a_n) + H \in \mathfrak{R}^* \text{ con } a_n = r \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dimostriamo che tale è un monomorfismo e in particolare che la funzione  $f$  rappresenta un isomorfismo tra i campi  $\mathfrak{R}$  e  $f(\mathfrak{R}) = \{ f(r) : r \in \mathfrak{R} \} = \{ {}^*r : r \in \mathfrak{R} \}$ .

Innanzitutto la funzione  $f$  è iniettiva infatti:

$$\text{siano } r, s \in \mathfrak{R} \text{ con } {}^*r = f(r) = f(s) = {}^*s \Rightarrow (a_n) + H = (b_n) + H \text{ con } a_n = r \text{ e } b_n = s \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a_n) - (b_n) \in H \Rightarrow (a_n) - (b_n) \equiv 0 \Rightarrow (a_n - b_n) \equiv 0 \Rightarrow \{ n \in \mathbb{N} : a_n - b_n = 0 \} \in \cup.$$

ora siccome  $\emptyset \notin \cup$  in particolare  $\{ n \in \mathbb{N} : a_n - b_n = 0 \} \neq \emptyset \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : a_m - b_m = 0 \Rightarrow a_m = b_m \Rightarrow r = s$  e quindi la  $f$  è iniettiva.

Dimostriamo ora che è un omomorfismo di campi:

$$\forall r, s \in \mathfrak{R} \quad f(r + s) = {}^*(r + s) = (c_n) + H = (a_n + b_n) + H = (a_n) + (b_n) + H = ((a_n) + H) + ((b_n) + H) = f(r) + f(s) \quad \text{quindi conserva la somma (dove } c_n = r + s, a_n = r, b_n = s \quad \forall n \in \mathbb{N})$$

$$\forall r, s \in \mathfrak{R} \quad f(r \cdot s) = {}^*(r \cdot s) = (c_n) + H = (a_n \cdot b_n) + H = (a_n) \cdot (b_n) + H = ((a_n) + H) \cdot ((b_n) + H) = f(r) \cdot f(s) \quad \text{quindi conserva il prodotto (dove } c_n = r \cdot s, a_n = r, b_n = s \quad \forall n \in \mathbb{N})$$

Restringiamo ora il codominio dell'applicazione  $f$  considerando:

$$f' = \mathfrak{R} \rightarrow f(\mathfrak{R}) \subseteq \mathfrak{R}^* \quad \text{applicazione che agisce allo stesso modo di } f \text{ sugli elementi di } \mathfrak{R}.$$

Avremo che  $f'$  è un monomorfismo perché lo è la  $f$  ed inoltre per costruzione è anche un'applicazione suriettiva. Abbiamo così dimostrato che  $\mathfrak{R}^*$  contiene un sottocampo isomorfo ad  $\mathfrak{R}$ .

L'insieme dei numeri reali viene detto anche insieme dei numeri standard mentre  $\mathfrak{R}^* \setminus \mathfrak{R}$  viene detto insieme dei numeri nonstandard.

Il nostro prossimo obiettivo è quello di far vedere che  $\mathfrak{R}^*$  contiene numeri in più di quelli standard. Consideriamo ad esempio il numero  $(a_n) + H \in \mathfrak{R}^*$  con  $a_n = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$  (cioè  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  è la successione di reali 1 2 3 4 5 6 7 8 9.....).

Sicuramente  $(a_n) + H$  non si può vedere come un  ${}^*r$  cioè  $(a_n) + H \notin f(\mathfrak{R})$ .

Analogamente si può vedere che il numero  $(b_n) + H \in \mathfrak{R}^*$  con  $b_n = 1/n \quad \forall n \in \mathbb{N}$  (cioè  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  è la successione di reali 1 1/2 1/3 1/4 1/5 1/6 1/7 1/8 1/9.....) non appartiene a  $f(\mathfrak{R})$ .

I numeri  $(a_n) + H$  e  $(b_n) + H$  sono chiamati rispettivamente numero *infinito* e numero *infinitesimo*.

Convenzioni notazionali: per semplificare il discorso identificheremo con lo stesso simbolo i numeri di  $f(\mathfrak{R})$  e quelli di  $\mathfrak{R}$ . In pratica indicheremo il generico elemento  $*r$  di  $f(\mathfrak{R})$  con  $r$ .

Ad esempio useremo  $7$  al posto di  $*7$  (che non è altro che  $(a_n)+H$  con  $a_n=7 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ).

Più in generale sia i numeri di  $\mathfrak{R}^*$  che quelli di  $\mathfrak{R}$  li indicheremo con le lettere minuscole e sarà poi compito nostro capire (dal contesto) se appartengono ad uno oppure all'altro insieme.

Diamo ora una definizione rigorosa di infiniti, infinitesimi (accennati prima) e numeri finiti di  $\mathfrak{R}^*$ .

**Definizione:** sia  $r \in \mathfrak{R}^*$ . Allora:

1.  $r$  è **infinito** se  $n < |r|$  per tutti i numeri naturali standard  $n$ .
2.  $r$  è **finito** se  $|r| < n$  per qualche numero naturale standard  $n$ .
3.  $r$  è **infinitesimo** se  $|r| < 1/n$  per tutti i numeri naturali standard  $n$ .

ESEMPI: Il numero  $r \in \mathfrak{R}^*$  con  $r = (a_n)+H$  e  $a_n = 1/n \quad \forall n \in \mathbb{N}$  è un numero infinitesimo.

Infatti  $\forall m \in \mathbb{N}$  fissato  $\{n : a_n = 1/n < 1/m\}$  è il complementare di un insieme finito e dunque appartiene ad  $\mathcal{U}$  (ricordiamoci che  $\mathcal{U}$  è un ultrafiltro libero su  $\mathbb{N}$  quindi contiene il filtro cofinito)

Se consideriamo il suo inverso cioè  $r' = (b_n)+H$  con  $b_n = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$  è un esempio di numero infinito.

Infatti  $\forall m \in \mathbb{N}$  fissato  $\{n : m < b_n\}$  è il complementare di un insieme finito e dunque appartiene ad  $\mathcal{U}$

OSS: dalla definizione e dalla proprietà di Archimede (definita più giù) per i numeri reali, usando l'identificazione di  $f(\mathfrak{R})$  con  $\mathfrak{R}$ , risulta ovvio che un numero è infinitesimo se e solo se è minore, in valore assoluto, di qualsiasi numero reale positivo; mentre è infinito se e solo se è maggiore, in valore assoluto, di qualsiasi numero reale positivo.

Osserviamo poi che anche il numero reale  $0$  è infinitesimo ed è l'unico numero reale infinitesimo (ovvio per la proprietà di Archimede).

Ricordiamo comunque la proprietà di Archimede per i numeri reali:

dati  $a$  e  $b$  due numeri reali positivi con  $a < b$  esiste un numero reale positivo intero  $n$  tale  $n \cdot a > b$

**Definizione:** due numeri iperreali  $r, s$  sono infinitamente vicini (e lo indicheremo con  $r \approx s$ ) se la loro differenza  $s - r$  è un infinitesimo.

**Lemma:** la somma di due numeri infinitesimi è un infinitesimo

DIM: Siano  $\varepsilon, \varepsilon'$  infinitesimi. Allora  $|\varepsilon| < b$  e  $|\varepsilon'| < b'$  per ogni  $b, b'$  reale positivo.

Siccome il valore assoluto in  $\mathfrak{R}^*$  ha tutte le proprietà del valore assoluto in  $\mathfrak{R}$  si ha che:

$$|\varepsilon + \varepsilon'| \leq |\varepsilon| + |\varepsilon'| < b + b' \quad \text{per ogni } b, b' \text{ reali positivi.}$$

Per ogni  $r$  reale positivo allora si ha che  $|\varepsilon + \varepsilon'| < r$  (infatti basta scegliere  $b = r - b'$ ) e quindi  $\varepsilon + \varepsilon'$  è un infinitesimo.

**TEOREMA:** La relazione  $\approx$  ( in  $\mathfrak{R}^*$  ) è d'equivalenza.

- Riflessività:  $\forall a \in \mathfrak{R}^* \quad a \approx a$  infatti  $a - a = 0$  che è un infinitesimo.
- Simmetricità: sia  $a \approx b \Rightarrow b - a = \varepsilon$  è un infinitesimo. Ma allora  $a - b = -\varepsilon$  è ancora un infinitesimo poiché lo è  $\varepsilon$  e quindi si ha che  $b \approx a$ .
- Transitività: siano  $a \approx b$ ,  $b \approx c \Rightarrow b - a = \varepsilon$ ,  $c - b = \varepsilon'$  sono infinitesimi. Ma allora sommando membro a membro  $c - b + b - a = \varepsilon + \varepsilon' \Rightarrow c - a = \varepsilon + \varepsilon'$  che è un infinitesimo per il lemma precedente.

**TEOREMA:** ogni numero iperreale finito è infinitamente vicino ad uno e un solo numero reale.

DIM: (ESISTENZA di tal numero reale) Sia  $p$  un numero iperreale finito.

Consideriamo  $A = \{x \in \mathfrak{R} : p \leq x\}$  e  $B = \{x \in \mathfrak{R} : x < p\}$ .

Essendo  $p$  finito sicuramente esiste un numero reale  $s$  tale che  $-s < p < s$ .

In particolare quindi  $B \neq \emptyset$  poiché almeno  $-s \in B$  e ha un maggiorante.

Sia  $r$  l'estremo superiore (è reale) di  $B$  (l'esistenza di  $r$  ci è assicurata dalla completezza di  $\mathfrak{R}$ ).

$\forall \varepsilon > 0$  in  $\mathfrak{R}$ ,  $r + \varepsilon \in A$  e  $r - \varepsilon \in B$ .

Quindi  $r - \varepsilon < p \leq r + \varepsilon$  e dunque  $|r - p| \leq \varepsilon \Rightarrow r - p$  è un infinitesimo da cui  $r \approx p$ .

(UNICITA' di tal numero reale) Siano  $b, c \in \mathfrak{R}$

faremo vedere che se  $p \approx b$  e  $p \approx c \Rightarrow b = c$

Per la transitività di  $\approx$  otteniamo innanzitutto che  $b \approx c$ . Ma  $b, c$  sono numeri reali e l'unico infinitesimo di cui possono differire è lo 0 e quindi per forza, siccome  $b - c \in \mathfrak{R}$  è che  $b - c = 0 \Rightarrow b = c$  come volevasi dimostrare (l'unicità).

**ESEMPLI:** Sia  $\varepsilon$  un numero iperreale infinitesimo.

- 1) Il numero  $3 + \varepsilon$  è infinitamente vicino a 3 poiché  $(3 + \varepsilon) - 3 = \varepsilon$  è un infinitesimo.
- 2) Ma anche  $3 + \varepsilon + \varepsilon$  è infinitamente vicino a 3 poiché  $(3 + \varepsilon + \varepsilon) - 3 = \varepsilon + \varepsilon$  che ancora un infinitesimo (essendo la somma di due infinitesimi un infinitesimo)

Daremo ora un nome a questo unico reale infinitamente vicino ad un iperreale finito.

**Definizione:** Sia  $b$  un numero iperreale finito. L'unico numero reale cui  $b$  è infinitamente vicino si chiama *parte standard di  $b$*  e viene denotato con  $st(b)$ .

