

APPENDICE

NOZIONI BASE E VARIE

1. Funzioni e relazioni di equivalenza

Questi appunti sono rivolti a persone che abbiano già una conoscenza elementare della teoria degli insiemi. Tuttavia in questa appendice ricordiamo alcune semplici nozioni sulle relazioni binarie ed in particolare sulle relazioni di equivalenza e d'ordine. Diamo come intuitiva la nozione di insieme, di appartenenza di un elemento ad un insieme, di unione e di intersezione. Nel seguito indicheremo:

- con \emptyset l'insieme vuoto,
- con $\{d_1, \dots, d_n\}$ l'insieme i cui elementi sono d_1, \dots, d_n .
- con $\{x : x \text{ verifica la proprietà } P\}$ l'insieme i cui elementi sono tutti e soli quelli verificanti la proprietà P .

Un passo fondamentale per la definizione dei concetti fondamentali della teoria degli insiemi è quello di definire la nozione di coppia ordinata e di prodotto cartesiano (si veda anche l'Appendice 1 al capitolo 3).

Definizione 1. Dati due elementi x ed y chiamiamo *coppia di primo elemento x e secondo elemento y* l'insieme $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ che indichiamo con (x, y) . Dati due insiemi X ed Y chiamiamo *prodotto cartesiano* l'insieme delle coppie costituite da un elemento di X ed un elemento di Y . Indichiamo con $X \times Y$ un tale insieme.

Da notare che gli insiemi $\{\{x\}, \{x, y\}\}$, $\{\{x, y\}, \{x\}\}$, $\{\{y, x\}, \{x\}\}$ e $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ coincidono tra loro e rappresentano tutti la stessa coppia (x, y) . Inoltre la coppia (x, x) è rappresentata dall'insieme $\{\{x\}\}$. La nozione di n -pla si definisce per induzione su $n \geq 2$ al modo seguente.

Definizione 2. Dati n elementi a_1, \dots, a_n chiamiamo n -pla di primo elemento a_1 , secondo elemento a_2 , ..., n -esimo elemento a_n l'insieme $((a_1, \dots, a_{n-1}), a_n)$ che indichiamo con (a_1, \dots, a_n) . Il *prodotto cartesiano di n insiemi X_1, \dots, X_n* è l'insieme

$$X_1 \times \dots \times X_n = \{(a_1, \dots, a_n) : a_1 \in X_1, \dots, a_n \in X_n\}.$$

Da notare che gli insiemi $\{\{x\}, \{x, y\}\}$, $\{\{x, y\}, \{x\}\}$, $\{\{y, x\}, \{x\}\}$ e $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ coincidono tra loro e rappresentano tutti la stessa coppia (x, y) . Inoltre la coppia (x, x) è rappresentata dall'insieme $\{\{x\}\}$.

Definizione 3. Una relazione *binaria* tra un insieme X ed un insieme Y è un sottoinsieme R di $X \times Y$. Una relazione binaria $f \subseteq X \times Y$ è chiamata *funzione* di X in Y se è univoca, cioè se, per ogni $x \in X$ esiste uno ed un solo y tale che $(x, y) \in f$.

Nel seguito denoteremo una funzione con una lettera minuscola, ad esempio la lettera f . L'insieme X viene detto *dominio*, l'insieme Y viene detto *codominio* di f . Per indicare che il dominio di f è X ed il suo codominio è Y scriveremo $f : X \rightarrow Y$. Per ogni $x \in X$ indichiamo con $f(x)$ l'unico elemento y tale che $(x, y) \in f$.

Definizione 4. Una funzione $f : X \rightarrow Y$ è *iniettiva* se $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$, è *suriettiva* se per ogni $y \in Y$ esiste almeno un $x \in X$ tale che $f(x) = y$. Una funzione si dice *biiettiva* se è sia suriettiva che iniettiva.

Usualmente per le relazioni binarie si utilizza la *notazione infissa* che consiste nello scrivere xRy per indicare che $(x,y) \in R$.

Siamo interessati a relazioni binarie che verificano una particolari proprietà:

- R è *riflessiva* se xRx per ogni $x \in S$

- R è *transitiva* se $\forall x,y,z \in S$

$$xRy \text{ e } yRz \Rightarrow xRz$$

- R è *simmetrica* se $\forall x,y \in S$

$$xRy \Rightarrow yRx$$

- R è *asimmetrica* se $\forall x,y \in S$

$$xRy \text{ e } yRx \Rightarrow x=y$$

- R è *totale* o *lineare* se $\forall x,y \in S$

$$xRy \text{ oppure } yRx.$$

Definizione 5. Una relazione binaria R in un insieme S è una *relazione di equivalenza* se è riflessiva, transitiva e simmetrica.

In generale indicheremo con \equiv una relazione di equivalenza.

Esercizio. Dato un insieme non vuoto S , dimostrare che l'identità, cioè la relazione

$$D(S) = \{(x,y) : x \text{ ed } y \text{ sono lo stesso elemento di } S\}$$

è una relazione di equivalenza (la più piccola sull'insieme S). Tale relazione viene anche detta *diagonale di S* in quanto nel caso $S = R$, la sua rappresentazione in un sistema di assi cartesiani ortogonali coincide la diagonale del primo e terzo quadrante.

Esercizio. Dimostrare che la relazione totale, cioè la relazione $R = S \times S$ secondo cui tutti gli elementi sono equivalenti tra loro è una relazione di equivalenza (la più grande su S).

Le relazioni di equivalenza sono alla base delle *definizioni per astrazione* in cui si considerano come un unico oggetto oggetti che, pur essendo diversi, differiscono per aspetti che si considerano non essenziali. Ad esempio consideriamo il seguente enunciato di un problema:

calcolare l'area di un triangolo di lati 3, 4, 5.

Spesso lo stesso problema viene enunciato al modo seguente:

calcolare l'area del triangolo di lati 3, 4, 5.

Questa seconda formulazione del problema è corretta? Il fatto che esistono infiniti triangoli con lati 3,4,5 sembra mostrare che non lo sia. Tuttavia l'uso del singolare significa che si è deciso di considerare un nuovo oggetto "astratto" il triangolo di lati 3, 4, 5 che in un certo senso rappresenta tutti i possibili triangoli di lati 3, 4, 5. Ciò è possibile poiché, per quanto riguarda il problema da affrontare, non è interessante sapere la posizione di un triangolo sul piano ma solo le sue dimensioni. Alla base di tale processo è la relazione di equivalenza per cui due triangoli sono *uguali* se hanno lati uguali. Per le strutture algebriche si procede in modo analogo. E possibile dire un gruppo di ordine 5 ma è possibile dire anche il gruppo di ordine 5. Infatti tutti i gruppi di ordine 5 sono isomorfi tra loro e l'isomorfismo è una relazione di equivalenza.

Un modo per formalizzare un tale modo di procedere è identificare un oggetto astratto definito in questo modo con l'insieme degli oggetti *concreti* da esso rappresentato.

Definizione 5. Data una relazione di equivalenza (S, \equiv) ed $x \in S$, la *classe completa di equivalenza determinata da x* è definita ponendo

$$[x] = \{x \in S : x' \equiv x\}.$$

Il *quoziente di S modulo* \equiv è l'insieme S/\equiv delle classi complete di equivalenza, cioè

$$S/\equiv = \{[x] : x \in S\}.$$

In altre parole se parto da un universo di oggetti S ed introduco una relazione di equivalenza \equiv tra oggetti di tale insieme, allora vengo a creare per astrazione un nuovo insieme di oggetti S/\equiv . Tornando all'esempio dei triangoli, l'espressione "*calcolare l'area del triangolo di lati 3, 4, 5*" diventa corretta se col termine "triangolo di lati 3, 4, 5" si intende un unico oggetto: la classe completa di equivalenza costituita da tutti i triangoli i cui lati hanno tali lunghezze.

Proposizione 6. Siano S ed S' due insiemi ed $f: S \rightarrow S'$ una funzione. Allora la relazione \equiv definita ponendo

$$x \equiv y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

è una relazione di equivalenza che viene detta il *nucleo* di f . Inoltre ogni relazione di equivalenza si ottiene in questo modo.

Dim. La prima parte della dimostrazione si lascia per esercizio. Sia \equiv una qualunque relazione di equivalenza in un insieme S e sia $S' = S/\equiv$. Allora la funzione $f: S \rightarrow S'$ ottenuta ponendo $f(x) = [x]$ è tale che

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow [x] = [y] \Leftrightarrow x \equiv y.$$

Nell'esempio dei triangoli la relazione di eguaglianza è determinata dalla funzione che associa ad ogni triangolo la terna costituita dalla lunghezza dei suoi lati.

Esempio: Sia S l'insieme i cui elementi sono mucchietti di monete e sia f la funzione che associa ad ogni mucchietto x la somma totale rappresentata da x . Allora due mucchietti sono da considerare equivalenti se corrispondono allo stesso valore.

2. Perché la definizione di coppia è così brutta

La definizione insiemistica di coppia è abbastanza strana ed arbitraria e comunque poco intuitiva. Ancora meno intuitiva è la nozione di terna, infatti, per definizione, una terna $(x,y,z) = ((x,y),z)$ viene ad essere definita come l'insieme $\{\{\{x\},\{x,y\}\},\{\{x\},\{x,y\}\},z\}$. D'altra parte è difficile dare una definizione insiemistica di coppia che sia intuitiva perché la nozione di coppia, e più in generale di *n-pla*, è forse ancora più immediata di quella di insieme. Basti pensare che quando scriviamo una parola come "cane" sappiamo benissimo distinguerla dalla parola "cena" e dalla parola "canne". Eppure tali parole hanno lo stesso insieme di lettere. Questo significa che, poiché tra la nozione di parola e quella di *n-pla* non esiste differenza, chiunque abbia imparato a scrivere è capace di capire la nozione di *n-pla*.

Perché allora si sente l'esigenza di definire in modo così brutto la nozione di coppia ?

Bisogna capire che i matematici hanno introdotto la teoria degli insiemi come strumento unico per costruire tutta la matematica. Ciò comporta che una coppia come $(2,5)$ deve essere rappresentata tramite un insieme costruito con gli elementi 2 e 5 e quindi deve essere rappresentata usando solo le parentesi $\{\}$ ed i simboli 2,5. Tale insieme non può essere $\{2,5\}$, cioè l'insieme che contiene come unici elementi 2 e 5, poiché in questo caso non potrei distinguere $(2,5)$ da $(5,2)$. Allora si deve usare un insieme da cui poter "estrarre" l'informazione di quale sia il primo elemento e quale sia il secondo. La definizione 1 costituisce un esempio perché la *codifica* (cioè il risalire dalla coppia all'insieme che la rappresenta) è unica e la *decodifica* (cioè il risalire dall'insieme alla coppia rappresentata) consiste:

- nel prendere il singoletto per estrarre il primo elemento x ,
- prendere l'insieme $\{x,y\} - \{x\}$, per poi estrarre il secondo elemento y .

Si sarebbe potuto procedere in infiniti modi diversi altrettanto validi dal punto di vista tecnico ma altrettanto poco intuitivi. Ad esempio avremmo potuto indicare con 0 l'insieme \emptyset e con 1 l'insieme $\{\emptyset\}$, inoltre avremmo potuto rappresentare con l'insieme $\{\{x,0\}, \{y,1\}\}$ la coppia (x,y) . D'altra parte i matematici, dopo avere imparato rapidamente la definizione insiemistica di coppia la dimenticano rapidamente per tornare a basarsi, nei propri ragionamenti, sulla nozione intuitiva di coppia.

Si pone in proposito il problema:

sarebbe possibile fondare la matematica, in particolare la nozione di insieme, sulla nozione di n-pla (equivalentemente di parola) da assumere come nozione primitiva ?

In effetti in un certo senso è quello che viene fatto in informatica limitatamente agli insiemi finiti. Infatti se si guarda un qualunque linguaggio di programmazione ci si accorge che gli insiemi non sono un *tipo* primitivo. In generale si utilizza, oltre il tipo "numero intero" e "numero reale", il tipo *stringa* (o *parola*) piuttosto che quello di *insieme*. Questo perché all'interno di una stringa è possibile scegliere un elemento (ad esempio il primo elemento) in modo automatico e questo permette di definire molti algoritmi. In un insieme invece non è possibile fare in generale una scelta almeno che non si faccia riferimento a particolari proprietà degli elementi coinvolti. Tuttavia dalla nozione di stringa è possibile ottenere quella di insieme facendo astrazione dall'ordine degli elementi e da possibili ripetizioni. Procedendo in modo più formale, sia A un alfabeto e (A^*, \cdot, ν) è il monoide libero su A . Questo significa che A^* è l'insieme delle parole (o *n-ple* o stringhe) sull'alfabeto A , che \cdot è l'operazione di giustapposizione che consiste nel mettere una parola dopo l'altra e che ν è la *parola vuota*, cioè un simbolo al di fuori di A che per definizione si comporta da elemento neutro. In tale monoide chiamiamo *ridotto* di una parola p una parola p' che si ottiene permutando lettere contigue e cancellando eventuali ripetizioni di lettere. Chiamiamo *equivalenti* due parole che si possono ridurre alla stessa parola (intuitivamente due parole sono equivalenti se e solo se sono costituite dalle stesse lettere). Quindi una classe di equivalenza può essere identificata con un sottoinsieme finito di A . Non è difficile dimostrare che una tale relazione di equivalenza è in realtà una congruenza di (A^*, \cdot, ν) e che il relativo quoziente di (A^*, \cdot, ν) sia isomorfo alla struttura algebrica $(P_f(A), \cap, \emptyset)$.

Naturalmente un tale modo di "fondare" la teoria degli insiemi presenta molte difficoltà. La principale è che sembra difficile introdurre i sottoinsiemi infiniti di A .

3. Le relazioni d'ordine

Una classe importante di relazioni binarie in un insieme sono le relazioni d'ordine.

Definizione 1. Diciamo che una relazione binaria R in un insieme S è una *relazione di pre-ordine* se è riflessiva e transitiva. Diciamo che R è una *relazione d'ordine* se è riflessiva transitiva ed asimmetrica.

Le relazioni di pre-ordine e di ordine usualmente vengono denotate con il simbolo \leq . Se S è un insieme ed $R \subseteq S \times S$ una relazione binaria su S allora a volte si usa dire che la coppia (S, R) è una *struttura relazionale*.

Definizione 2. Date due strutture relazionali (S_1, R_1) e (S_2, R_2) chiamiamo *isomorfismo* di (S_1, R_1) in (S_2, R_2) ogni funzione biettiva $f: S_1 \rightarrow S_2$ tale che

$$(x, y) \in R_1 \Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in R_2.$$

Definizione 3. Data una struttura di preordine (S, \leq) ed un sottoinsieme X di S prende il nome di *maggiorante* (minorante) di X un elemento $m \in S$ tale che $x \leq m$ ($m \leq x$) per ogni $x \in X$. Prende il nome di *massimo* (*minimo*) *elemento* di X un elemento $m \in X$ tale che $m \geq x$ ($x \geq m$)

per ogni $x \in X$. Si chiama *estremo superiore* un elemento $\sup(X)$ che sia il minimo dell'insieme dei maggioranti di X . Si chiama *estremo inferiore* un elemento $\inf(X)$ che sia il massimo dell'insieme dei minoranti di X .

Non è detto che gli estremi superiori o inferiori esistano sempre. Ad esempio l'insieme dei numeri primi non ammette estremo superiore¹. Se m è il minimo di X è anche l'estremo inferiore ma il viceversa non vale. La stessa cosa si può dire per il massimo. Ad esempio se X è l'intervallo aperto $(0,1)$ allora 0 è l'estremo inferiore ma non è il minimo in quanto non appartiene ad X . 1 è l'estremo superiore ma non è il massimo.

Definizione 4. Si chiama *reticolo* un insieme ordinato (S, \leq) tale che per ogni coppia x ed y di elementi di S esistono $\sup\{x,y\}$ e $\inf\{x,y\}$. Si dice che (S, \leq) è un *reticolo completo* se per ogni insieme X di elementi di S esistono $\sup(X)$ e $\inf(X)$.

Dato un reticolo completo esiste l'estremo superiore della famiglia di tutti gli elementi di S . Tale estremo superiore è ovviamente il massimo di S ed usualmente viene denotato con 1 . Similmente esiste l'estremo inferiore della famiglia di tutti gli elementi di S . Tale estremo inferiore è il minimo di S e viene usualmente denotato con 0 .

In un reticolo possiamo definire due operazioni \wedge e \vee ponendo

$$x \wedge y = \inf\{x,y\} \text{ e } x \vee y = \sup\{x,y\}.$$

In tale modo si ottiene una struttura algebrica (S, \vee, \wedge) verificante le seguenti proprietà.

- (i) $x \vee y = y \vee x$; $x \wedge y = y \wedge x$ (proprietà commutativa)
- (ii) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$; $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ (proprietà associativa)
- (iii) $x \vee x = x$; $x \wedge x = x$ (idempotenza)
- (iv) $x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x$.

Viceversa è possibile provare che data una struttura algebrica (S, \vee, \wedge) (i), (ii) e (iii), allora posto per definizione $x \leq y$ se $x \wedge y = x$, la struttura (S, \leq) è un reticolo. In altre parole è possibile introdurre i reticoli sia come struttura d'ordine che come strutture algebriche.

Definizione 5 (Definizione algebrica). Chiamiamo *reticolo* una struttura algebrica (S, \vee, \wedge) che verifichi gli assiomi i), ii) e iii).

4. Trasformare una relazione in un ordine o in una equivalenza.

Se una relazione R non è una relazione di pre-ordine allora non è difficile farla diventare una relazione di pre-ordine aggiungendo un opportuno insieme di coppie. Per mostrare come questo può essere fatto vediamo prima come si può rendere riflessiva una relazione.

Definizione 1. Dato un insieme S , la *diagonale* di S è la relazione

$$D(S) = \{(x,y) : x \text{ coincide con } y\}.$$

Tale relazione viene anche chiamata *identità* ed indicata con il simbolo.

Dalla definizione di relazione riflessiva segue immediatamente la seguente proposizione.

Proposizione 2. Per ogni relazione binaria R , la relazione $\text{Rifl}(R) = R \cup D(S)$ è una relazione riflessiva, la più piccola relazione riflessiva contenente R . Inoltre R è riflessiva se e solo se $\text{Rifl}(R) = R$ cioè se e solo se $R \supseteq D(S)$.

¹ Ricordiamo che gli antichi greci provarono che per ogni numero primo p esiste un numero primo q maggiore di p (in termini attuali diremmo che l'insieme dei numeri primi è infinito).

$Rifl(R)$ viene chiamata *relazione riflessiva generata da R*. Vediamo ora come si può rendere transitiva una relazione.

Definizione 3. Sia R una relazione in S , chiamiamo *percorso* da x ad y una successione x_1, \dots, x_n di elementi di S tale che $x = x_1$, $x_n = y$ e $x_{i-1} R x_i$. Definiamo in S la relazione $Trans(R)$ ponendo

$$Trans(R) = \{(x, y) : \text{esiste un percorso da } x \text{ ad } y\}.$$

$Trans(R)$ viene detta *relazione transitiva generata da R* oppure *chiusura transitiva di R*. Infatti vale la seguente proposizione.

Proposizione 4. Per ogni relazione binaria R , la relazione $Trans(R)$ è una relazione transitiva, la più piccola relazione transitiva contenente R . Inoltre la relazione $Trans(Rifl(R))$ è una relazione di pre-ordine, cioè è riflessiva e transitiva.

La relazione $Trans(Rifl(R))$ viene chiamata *pre-ordine generato da R*. Resta da trasformare una relazione di pre-ordine in una relazione d'ordine, cioè ottenere la proprietà antisimmetrica. Ora se R contiene due coppie (a, b) e (b, a) con $a \neq b$, allora non esiste nessuna speranza di estendere R in modo da ottenere tale proprietà. Per ottenerla allora dobbiamo quotizzare opportunamente la struttura (S, R) . Infatti vale la seguente proposizione.

Proposizione 5. Sia \leq una relazione di un pre-ordine, allora la relazione \equiv che si ottiene ponendo $x \equiv y$ se e solo se $x \leq y$ e $y \leq x$ è una relazione di equivalenza. Se si definisce in S/\equiv la relazione \leq ponendo

$$[x] \leq [y] \Leftrightarrow x \leq y$$

tale relazione è d'ordine in S/\equiv .

Infine vediamo come si possa modificare una relazione R in modo da ottenere la simmetria.

Proposizione 6. Per ogni relazione R poniamo $R^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in R\}$ e $Simm(R) = R \cup R^{-1}$. Allora $Rifl(R)$ è una relazione simmetrica, la più piccola relazione simmetrica contenente R .

Proposizione 7. Data una relazione R , $Trans(Simm(Rifl(R)))$ è una relazione di equivalenza, la più piccola relazione di equivalenza contenente R .

La relazione $Trans(Simm(Rifl(R)))$ viene chiamata *relazione di equivalenza generata da R*.

5. Teoremi di punto fisso in insiemi ordinati

Se $f : S \rightarrow S$ è una funzione definita in un insieme S allora prende il nome di *punto fisso* di f ogni elemento $z \in S$ tale che $f(z) = z$. La teoria dei punti fissi è una delle teorie matematiche più interessanti e feconde. Esistono due approcci diversi a tale questione, il più importante è la teoria dei punti fissi in uno spazio metrico. Un altro approccio è la teoria dei punti fissi in insiemi ordinati e di cui esporremo due teoremi.

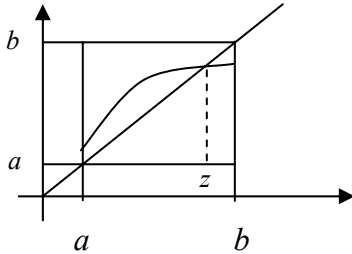
Teorema 1. Sia L un reticolo completo ed $k : L \rightarrow L$ una funzione monotona. Allora esiste un punto fisso per k cioè un elemento $z \in L$ tale che $k(z) = z$.

Dim. Poniamo $X = \{x \in L : x \leq k(x)\}$, allora tale insieme è non vuoto poiché contiene almeno l'elemento minimo 0. Sia

$$z = \text{Sup} \{x \in L : x \leq k(x)\},$$

allora poiché $z \geq x$ per ogni $x \in X$, dalla monotonia di k segue che $k(z) \geq k(x)$ e quindi $k(z) \geq x$ per ogni $x \in X$. Da ciò segue che $z = \text{Sup}\{x \in L : x \leq k(x)\} \leq k(z)$. D'altra parte, dal fatto che $z \leq k(z)$ segue anche che $k(z) \leq k(k(z))$ e quindi che $k(z) \in X$. Essendo z un maggiorante di tutti gli elementi di X possiamo concludere che $z \geq k(z)$. In definitiva abbiamo provato che $k(z) = z$.

Esempio: Supponiamo che L sia uguale ad un intervallo $[a, b]$ e che $k : [a, b] \rightarrow [a, b]$ sia una qualunque funzione monotona.



In tale caso i punti fissi, essendo soluzione del sistema $y = k(x)$ e $y = x$, coincidono con le intersezioni della curva con la diagonale. Il tratto $\{x : x \leq k(x)\}$ rappresenta un tratto in cui il grafico di k si mantiene al di sopra della diagonale. Come asserito dal teorema, un punto fisso si ottiene considerando $z = \text{Sup}\{x \in L : x \leq k(x)\}$. Un modo più costruttivo per trovare un punto fisso per un insieme ordinato è suggerito dal seguente teorema.

Teorema 2. Supponiamo che L sia un reticolo completo e che $k : L \rightarrow L$ sia una funzione crescente tale che

$$k(\text{Sup}_{n \in \mathbb{N}} x_n) = \text{Sup}_{n \in \mathbb{N}} k(x_n) \tag{1}$$

per ogni successione crescente $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Sotto tale ipotesi per ogni x_0 tale che $x_0 \leq k(x_0)$, l'elemento

$$z_0 = \text{Sup}_{n \in \mathbb{N}} k^n(x_0)$$

è un punto fisso, precisamente il minimo punto fisso di k maggiore di x_0 .

Dim. Per provare che z_0 è un punto fisso osserviamo che essendo k monotona, da $x_0 \leq k(x_0)$ segue che $k(x_0) \leq k^2(x_0)$. Inoltre da $k(x_0) \leq k^2(x_0)$ segue che $k^2(x_0) \leq k^3(x_0)$ e così via. Pertanto la successione $(k^n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ è crescente e quindi

$$k(z_0) = k(\text{Sup}_{n \in \mathbb{N}} k^n(x_0)) = \text{Sup}_{n \in \mathbb{N}} k(k^n(x_0)) = \text{Sup}_{n \in \mathbb{N}} k^{n+1}(x_0) = \text{Sup}_{n \in \mathbb{N}} k^n(x_0) = z_0.$$

E' ovvio che $z_0 \geq x_0$, per mostrare che è il minimo punto fisso di k maggiore di x_0 sia $z \geq x_0$ tale che $k(z) = z$. Allora $z = k(z) \geq k(x_0)$. D'altra parte dalla disequazione $z \geq k(x_0)$ segue che $z = k(z) \geq k^2(x_0)$. Proseguendo in tale modo si prova che $z \geq k^n(x_0)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi $z \geq \text{Sup}_{n \in \mathbb{N}} k^n(x_0) = z_0$.

Questo semplice teorema permette di inquadrare molte situazioni che si incontrano in matematica. Facciamo due esempi tratti dall'algebra e dalla geometria.

Esempio: Sia $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ una funzione continua e crescente. Allora poiché ogni successione crescente di elementi di $[a, b]$ è convergente ed ha come limite il relativo estremo superiore, risulta che

$$f(\text{Sup}_{n \in \mathbb{N}} x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \text{Sup}_{n \in \mathbb{N}} f(x_n).$$

Poiché $a \leq f(a)$, risulta che l'elemento $\text{Sup}_{n \in \mathbb{N}} f^n(a)$ è un punto fisso di f .

Esempio: Sia G un gruppo e definiamo l'operatore $T : P(G) \rightarrow P(G)$ ponendo

$$T(X) = X \cup X^{-1} \cup X \cdot X \cup \{1\}$$

dove

$$X^{-1} = \{x^{-1} : x \in X\} ; X \cdot X = \{x_1 \cdot x_2 : x_1 \in X, x_2 \in X\}$$

Allora i punti fissi di T sono le parti stabili di G cioè i sottoinsiemi di G che contengono l'elemento neutro e sono chiusi sia rispetto al prodotto che rispetto all'inverso. In altri termini i punti fissi sono i sottogruppi di G . Non è difficile vedere che T è un operatore monotono che verifica (1). Pertanto dato un sottoinsieme X risulta che $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T^n(X)$ è il minimo punto fisso di T contenente X . In altri termini $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T^n(X)$ è il più piccolo sottogruppo che contiene X e prende il nome di *sottogruppo generato da X* .

Esempio: Sia S uno spazio Euclideo e sia T l'operatore definito ponendo

$$T(X) = \{x \in S \mid \exists p, \exists q \in X, x \in \overline{pq}\}$$

avendo indicato con \overline{pq} il segmento chiuso di estremi p e q . In altre parole $T(X)$ è l'insieme dei punti che si trovano su di un segmento i cui estremi appartengono a X . Sono punti uniti di T tutti e soli i sottoinsiemi convessi di S . Poiché T verifica (1), per ogni insieme X l'unione $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T^n(X)$ è il più piccolo punto fisso che contiene X , cioè il più piccolo insieme convesso che contiene X .