

CAPITOLO 4 METODO ASSIOMATICO E STRUTTURALISMO

1. Paradossi e crisi della teoria degli insiemi

Non mi sarei mai iscritto ad una associazione che mi accettasse come membro.

(il comico Groucho Marx).

Maria è destinata ad essere infelice, ama solo le persone che non l'amano

(da una conversazione tra studentesse)

Considerare la teoria degli insiemi come base su cui fondare tutta la matematica mostrò ben presto alcune difficoltà di fondo. Dopo pochi anni che la teoria degli insiemi si andava diffondendo, cominciarono ad essere scoperti diversi paradossi che mostravano come la teoria degli insiemi fosse contraddittoria. Prima di esporre tali paradossi, esaminiamo un po' più da vicino quelle che sono due caratteristiche principali della nozione di insieme che permettono di distinguerla dalla analoga nozione di classe o da quella di proprietà.

a) Principio di comprensione.

Tale principio afferma che data una qualunque proprietà P , la collezione degli enti verificanti tale proprietà, che indicheremo con $\{x : x \text{ verifica } P\}$ è un insieme. Ad esempio, alla proprietà di "essere pari" corrisponde l'insieme dei numeri pari, alla proprietà di "essere maggiore di 2" corrisponde l'insieme dei numeri maggiori di due e così via.

b) Principio di sostanzialità.

Tale principio, che è forse quello più importante, afferma che ogni insieme ha carattere di "sostanza" nel senso che, all'interno del discorso scientifico, gli insiemi possono essere trattati allo stesso modo di oggetti individuali come tavolo, atomo, punto. Il principio di sostanzialità comporta che i nomi degli insiemi possono figurare liberamente come soggetti all'interno delle frasi e quindi, in particolare, che ha senso dire che un insieme verifica o meno una data proprietà. In termini insiemistici ciò può essere espresso con più precisione dicendo che un insieme può essere elemento o meno di un altro dato insieme. Ad esempio

"l'insieme dei numeri primi è infinito"

è una frase in cui è l'intero insieme dei numeri primi a figurare come soggetto e tale insieme verifica la proprietà di essere infinito. Ciò non avviene, ad esempio, nella frase equivalente

"per ogni numero primo p esiste un numero primo q maggiore di p ".

Un'altra conseguenza del principio di sostanzialità è che gli insiemi vengono considerati esistenti indipendentemente dal processo conoscitivo o creativo dell'uomo (come appunto avviene per le "sostanze"). Ciò pone quella che è la più moderna delle teorie matematiche, la teoria degli insiemi, nell'ambito di una delle più antiche filosofie: il platonismo.

Il paradosso della classe di tutti gli insiemi.

Proposizione 1. La classe di tutti gli insiemi ha cardinalità maggiore di quella di tutti gli insiemi. Pertanto conduce ad un paradosso.

Dim. Sia C la classe di tutti gli insiemi e sia Z un insieme. Allora la funzione che associa ad ogni elemento $z \in Z$ il singoletto $\{z\}$ è una funzione iniettiva di Z in C . In particolare si arriva al paradosso per cui l'insieme C ha cardinalità maggiore di quella di $P(C)$ in contrasto con il teorema di Cantor.

Antinomia di Russell (1901). Chiamiamo *normale* un insieme che non appartiene a se stesso. Gli insiemi che usualmente consideriamo sono normali. Ad esempio l'insieme $\{1, \{2,3\}, \{4,5,6\}\}$ non appartiene a se stesso e quindi è normale. L'insieme $\{X : X \text{ è finito}\}$ degli insiemi finiti è infinito (ad esempio tutti i singoletti $\{n\}$ con $n \in \mathbb{N}$ sono finiti). Ma allora tale insieme non appartiene a se stesso e quindi è normale. D'altra parte l'insieme degli insiemi infiniti $\{X : X \text{ è infinito}\}$ è infinito e quindi appartiene a se stesso. Pertanto non è normale. Ancora "l'insieme di tutti gli insiemi" appartiene a se stesso e quindi non è normale. Se tali insiemi sembrano troppo grossi, possiamo considerare l'insieme X degli insiemi che sono descrivibili nella lingua italiana. Tale insieme non è molto grande poiché con la lingua italiana posso formulare solo una quantità numerabile di descrizioni e quindi X è numerabile. D'altra parte, avendo definito X tramite la lingua italiana, X appartiene a se stesso.

Data la proprietà di essere normale, per il principio di comprensione esisterà un insieme corrispondente, che chiamiamo *insieme di Russell*, cioè l'insieme $R = \{X \mid X \notin X\}$. D'altra parte, in base al principio di sostanzialità ha senso chiedersi se R è normale o meno. Da queste due osservazioni segue il seguente paradosso dovuto a B. Russell.

Proposizione 2. Sia $R = \{X \mid X \notin X\}$ l'insieme di Russell, Allora risulta che

$$R \in R \Leftrightarrow R \notin R.$$

Dim. Se $R \in R$ allora R deve verificare la proprietà caratteristica di R e quindi $R \notin R$. Se $R \notin R$ allora R verifica la proprietà caratterizzante R e quindi $R \in R$. \square

Nota: Il paradosso del barbiere, Marx e le studentesse. Da notare che la sola implicazione $R \in R \Rightarrow R \notin R$ non risulta paradossale. Per capire tale questione riconsideriamo la battuta di Marx con cui si è iniziato il paragrafo. Detto x l'insieme dei membri di una associazione allora Marx afferma che

$$\forall x \text{ } i \in x \Rightarrow i \notin x.$$

Questo non è paradossale ma è solo la prova che $i \notin x$. In altri termini Marx non può appartenere a nessuna associazione. Detto più in generale, il fatto che una implicazione $A \Rightarrow \neg A$ risulti vera non è affatto paradossale e permette di dedurre solo che A è falsa. Infatti, $A \Rightarrow \neg A$ è logicamente equivalente ad $\neg A$. Per convincersi di questo basta ricordare che una implicazione del tipo $A \Rightarrow B$ risulta equivalente alla disgiunzione $\neg A \vee B$. Pertanto, in particolare, $A \Rightarrow \neg A$ è equivalente a $\neg A \vee \neg A$ cioè a $\neg A$.

D'altra parte le dimostrazioni per assurdo di cui abbiamo parlato nel primo capitolo si basano proprio su tale principio.

Risulta invece paradossale una equivalenza del tipo $A \Leftrightarrow \neg A$ che afferma che una asserzione A è sia vera che falsa.

Più vicina alla struttura logica del paradosso di Russell è l'osservazione su Maria che ama solo le persone che non l'amano. Dal punto di vista logico viene affermata la validità dell'asserzione $ama(Maria, X) \Leftrightarrow \neg ama(X, Maria)$. Ponendo al posto di X Maria si ottiene in particolare che

$$ama(Maria, Maria) \Leftrightarrow \neg ama(Maria, Maria)$$

che è ovviamente una contraddizione. L'effetto di tale contraddizione è meno catastrofico del paradosso di Russell in quanto prova solo che non può esistere una persona che ama solo le persone che non l'amano.

Un paradosso simile era noto agli antichi greci sotto la forma del "paradosso del barbiere". In tale paradosso veniva data la seguente definizione di "barbiere"

Definizione. "il barbiere è una persona che taglia la barba a tutte le persone che se non se la tagliano da sole"

Allora detto Carlo il barbiere davanti al problema di farsi la barba o meno risulta che

- se Carlo non si fa la barba allora, poiché è uno che non si fa la barba da solo, deve farsela (e quindi sbaglia)

- se Carlo si fa la barba allora fa la barba ad uno che se la fa da solo (e quindi sbaglia)

Ragionandoci un po' è possibile provare che non può esistere una persona che fa questo mestiere.

Si potrebbe pensare che tali contraddizioni possano nascere solo dalla considerazione di proprietà strane come quella di non appartenere a se stesso o dalla considerazione di insiemi troppo grandi come l'insieme di tutti gli insiemi e che pertanto se ci si limita a proprietà ed insiemi più familiari sia possibile evitare i guai. Le cose non stanno così, esistono contraddizioni che nascono dalla considerazione di insiemi che appaiono assolutamente "normali".

Antinomia della classe degli insiemi con tre elementi. Si consideri la semplicissima proprietà "avere tre elementi". In base al principio di comprensione esisterà l'insieme corrispondente, cioè l'insieme $T = \{X \mid X \text{ ha tre elementi}\}$, cioè il numero cardinale $\{\{a, b, c\}\}$. Per tale insieme è possibile provare la stessa strana proprietà di cui gode l'insieme di tutti gli insiemi.

Proposizione 3. L'insieme $T = \{X \mid X \text{ ha tre elementi}\}$ ha più elementi di ogni altro insieme. In particolare T ha più elementi di $\mathcal{P}(T)$ (in contrasto con il teorema di Cantor).

Dim. Sia Z un qualunque insieme e consideriamo un qualunque insieme di tre elementi, ad esempio l'insieme $\{a, b, c\}$. Allora la corrispondenza $f: Z \rightarrow T$ che ad ogni elemento $x \in Z$ associa l'insieme $f(x) = \{(a, x), (b, x), (c, x)\}$ è una funzione iniettiva di Z in T . Ciò prova che in T ci sono più elementi che in Z . \square

Forse è interessante riformulare il paradosso della classe degli insiemi con tre elementi anche per la classe dei gruppi (classe di cui gli algebristi parlano quotidianamente).

Proposizione 4. L'insieme G dei gruppi ha più elementi di ogni altro insieme. In particolare G ha più elementi di $\mathcal{P}(G)$ (in contrasto con il teorema di Cantor).

Dim. Per prima cosa osserviamo che ogni singoletto $\{z\}$ può essere considerato un gruppo $(\{z\}, +, -, z)$ dove le operazioni sono definite ponendo $z+z = z$ e $-z = z$. E' infatti un gruppo in cui l'elemento neutro è z e l'inverso di z è ancora z . Sia Z un qualunque insieme. Allora la corrispondenza $f : Z \rightarrow G$ che associa ad ogni $z \in Z$ il gruppo $f(z) = (\{z\}, +, -, z)$ definito dal singoletto $\{z\}$ è iniettiva. Pertanto G ha più elementi di Z .

In realtà tale teorema è molto più generale, infatti vale per la classe degli anelli, la classe degli spazi vettoriali e per tutte le classi di strutture definite da un sistema di assiomi.

Problema: Chiamiamo *club* un insieme qualunque e consideriamo la classe $C = \{x : io \in x\}$ dei club che mi hanno come membro. Provare, con un ragionamento simile a quello della Proposizione 3, che comunque si consideri un insieme Z , C ha cardinalità maggiore o uguale a quella di Z e che quindi C conduce ad un paradosso.

Problema: Dimostrare che la classe dei numeri cardinali porta ad un paradosso.

Problema: Dimostrare che la classe di tutti gli insiemi finiti conduce ad un paradosso.

2. Due modi di affrontare i paradossi: intuizionismo e metodo assiomatico.

Vi furono due modi diversi di reagire alla scoperta di tali paradossi. Quello della maggior parte dei matematici fu semplicemente di fingere di non accorgersene. La teoria degli insiemi risultava essere uno strumento tanto utile che nessuno sembrava disposto a rinunciarci per questioni di rigore scientifico. Quei pochi che invece si occupavano di fondamenti della matematica videro nei paradossi la crisi dell'intero apparato conoscitivo della matematica. Vediamo cosa scrive Frege nel 1903 nei suoi *Fondamenti dell'aritmetica* dove propone una definizione dei numeri interi su base insiemistica.

Nulla di più indesiderabile può capitare ad uno scienziato del fatto che una delle fondamenta del suo edificio si incrina dopo che l'opera è finita. E questa la situazione in cui mi trovo in seguito ad una lettera (contenente il paradosso) inviatami del sig. Bertrand Russell proprio mentre si stava ultimando la stampa di questo volume. . .

"Solatium miseris, socios habuisse malorum". Anch'io ho questo sollievo, se sollievo lo possiamo chiamare; infatti chiunque nelle sue dimostrazioni abbia fatto uso di estensioni di concetti, di classi, di insiemi (compresi i sistemi di Dedekind) si trova nella mia stessa posizione. Non è soltanto questione del mio particolare modo di gettare le fondamenta, ma è in questione la possibilità o meno di dare all'aritmetica un qualsiasi fondamento logico.

I matematici che si occupavano dei fondamenti della matematica tentarono di risolvere la questione dei paradossi in teoria degli insiemi seguendo due vie totalmente diverse tra loro, quella dell'*intuizionismo* e quella dell'*assiomatizzazione* della teoria degli insiemi ed in generale della matematica.

L'intuizionismo. Gli intuizionisti rigettavano completamente la teoria di Cantor e quella parte della matematica che su essa si fondava. Esponenti di questa corrente filosofica, che si ispira a Kant, sono due matematici di rilievo, L.E.J. Brouwer (1881-1966) e H. Weyl (1885-1955). Gli intuizionisti sostengono che la matematica si fonda sull'intuizione *a priori* del tempo e che i suoi enti sono «costruzioni» effettuate a partire da questa intuizione. In particolare, l'intuizione del tempo porta all'idea di numero intero che essi ritengono, in comune con i pitagorici, base di tutta la matematica. Non ha senso ricondurre le nozioni di numero e quelle insiemistiche o assiomatiche perché l'idea di numero è insita in ogni uomo. A partire da tale intuizione, mediante metodi costruttivi, si doveva poi procedere alla edificazione del rimanente corpo della matematica:

MATEMATICA =

INTUIZIONE DEL NUMERO INTERO E COSTRUZIONE DEGLI ENTI MATEMATICI

Se una parte della matematica non era ottenibile in tale modo, allora era inaffidabile e pertanto rigettata via.

A partire da tali idee gli intuizionisti sviluppano una matematica ed una logica per molti aspetti diversa e più sottile di quella che usualmente siamo abituati a considerare. Ogni asserzione matematica è giustificata dalla costruzione di una dimostrazione, ogni ente matematico esiste solo se è stato concretamente costruito. Ad esempio i connettivi logici sono interpretati grosso modo al modo seguente.

- un'asserzione atomica, cioè priva di connettivi logici, α è valida solo se la costruzione da essa descritta è stata fatta.
- una asserzione $\neg\alpha$ è valida solo se da α è stata derivata una contraddizione
- una asserzione $\alpha\wedge\beta$ è valida solo se si è esibita sia una dimostrazione di α che una dimostrazione di β .
- una asserzione $\alpha\vee\beta$ è valida solo se si è esibita o una dimostrazione di α oppure una dimostrazione di β .
- una asserzione $\exists x(\alpha)$ è valida se e solo se si è costruito un ente matematico verificante la proprietà espressa da α .

Da questa interpretazione seguono leggi della logica notevolmente diverse da quelle classiche. Ad esempio la legge del terzo escluso per gli intuizionisti non è valida perché se valesse $\alpha\vee\neg\alpha$ per ogni asserzione α , allora, qualunque sia l'asserzione saremmo sempre in grado di provare α oppure provare $\neg\alpha$. Ciò potrebbe accadere solo se tutte le questioni della matematica fossero state risolte.

Inoltre la legge di doppia negazione neanche è valida perché il significato dell'asserzione $\neg(\neg\alpha)$ è che da $\neg\alpha$ segue una contraddizione mentre il significato di α è che io sono in grado

di esibire e costruire un ente matematico soddisfacente la proprietà α . Ad esempio $\neg\neg\exists x(\alpha)$ significa che è assurdo supporre che non esista un elemento x per cui valga α . Invece $\exists x(\alpha)$ significa che si è in grado di esibire concretamente un elemento che verifica α . In altre parole gli intuizionisti utilizzavano un tipo di negazione in cui venivano distinte le dimostrazioni per assurdo (con la doppia negazione) da quelle costruttive (senza negazione).

L'intuizionismo, per quanto interessante ed affascinante, non ebbe molti seguaci e normalmente viene ignorato dai matematici contemporanei. In questi appunti non ce ne occuperemo ulteriormente.

Il metodo assiomatico. La presentazione della matematica in forma assiomatica è, come abbiamo già osservato, il merito principale dell'opera di Euclide. Il metodo assiomatico assume però, dalla fine dell'ottocento in poi, aspetti completamente nuovi. L'opera in cui il nuovo modo di considerare il metodo assiomatico si esprime in maniera più completa è *"I fondamenti della geometria"* di David Hilbert la cui prima edizione risale al 1899. Lo scopo che si propone Hilbert è quello di fornire una rigorosa assiomatizzazione degli Elementi di Euclide ma la filosofia che sta alla base di tale libro è totalmente diversa da quella degli Elementi. In Euclide gli assiomi, e quindi i teoremi erano visti come asserzioni vere riguardanti un mondo, quello degli enti matematici, avente una esistenza propria. La matematica si caratterizzava come studio di tali enti (i numeri, i punti, le rette, ...) così come la zoologia si caratterizza per lo studio degli animali e la botanica per lo studio dei vegetali. Totalmente diverso è invece l'atteggiamento che viene assunto dai fautori del moderno metodo assiomatico. La matematica si caratterizza non per avere un particolare oggetto di studio, ma per essere un particolare metodo di indagine quello, appunto, ipotetico-deduttivo. In altre parole il metodo assiomatico da strumento di lavoro della matematica viene a coincidere con la matematica stessa.

L'essenza dell'approccio assiomatico consiste nell'esaminare tutte le conseguenze (interessanti) implicite in un particolare gruppo di ipotesi (gli assiomi), conseguenze ottenute con il solo ausilio di deduzioni senza mai fare riferimento all'esperienza o alla intuizione. È significativo esaminare il diverso atteggiamento rispetto alle definizioni degli enti primitivi. In Euclide gli assiomi sono preceduti dalle definizioni: come si può parlare dei punti e delle rette se non si è prima spiegato che cosa sono i punti e le rette? Le definizioni cercano pertanto, in qualche modo, di indicare ciò di cui si vuole parlare, di facilitare l'intuizione, di distinguere un ente matematico da un altro. Come vedremo nel paragrafo successivo, nell'approccio alla geometria proposto da Hilbert ciò non accade, in un certo senso le definizioni degli enti primitivi mancano del tutto. Semmai si può parlare di nomenclatura; si chiamano, per comodità espositiva, "punti" gli elementi di un dato insieme, "rette" gli elementi di un altro insieme.

3. Un approccio assiomatico alla geometria.

I *"Fondamenti della Geometria"* di Hilbert iniziano nel modo seguente.

Consideriamo tre diversi sistemi di oggetti: chiamiamo "punti" gli oggetti del primo sistema e li indichiamo con A, B, C, ...; chiamiamo "rette" gli oggetti del secondo

sistema e li indichiamo con $a, b, c \dots$; chiamiamo "piani" gli oggetti del terzo sistema e li indichiamo con $\alpha, \beta, \gamma \dots$.

. . . Noi consideriamo punti, rette e piani in certe relazioni reciproche ed indichiamo queste relazioni con parole come "giacere", "fra", "congruente"; la descrizione esatta e completa, ai fini matematici, di queste relazioni segue dagli assiomi della geometria.

Ciò comporta tra l'altro che non ha senso definire i punti o le rette, ha piuttosto senso definire una intera classe di strutture geometriche caratterizzata da un particolare sistema di assiomi. Dato poi un modello di un tale sistema di assiomi, saranno chiamati "punti" alcuni suoi elementi e "rette" altri elementi. In altre parole l'attributo di essere punto per un dato oggetto non è definibile in termini di proprietà dell'oggetto stesso (ad esempio essere ciò che non ha parti) ma in termini della sua collocazione all'interno di una struttura verificante un particolare sistema di assiomi. Possiamo anche dire che le definizioni sono date implicitamente dallo stesso sistema di assiomi, ciò nel senso che "punto" è ogni elemento di una struttura verificante gli assiomi della geometria; "numero reale" è ogni elemento di una struttura algebrica verificante un sistema di assiomi per i campi completi archimedei.

Per capire meglio lo spirito del libro di Hilbert e del metodo assiomatico, esponiamo i primi assiomi dei suoi *Fondamenti* che si riferiscono alla geometria piana ed alla relazione di giacenza¹. Se un punto P giace su di una retta r diremo anche che r passa per P .

A1 Per due punti A e B esiste almeno una retta r che passa per A e B .

A2 Per due punti A e B esiste al più una retta che passa per A e B .

A3 Su ogni retta giacciono almeno due punti, ci sono almeno tre punti che non giacciono su di una stessa retta.

Dette poi *parallele* due rette che non hanno nessun punto in comune, consideriamo anche il famoso assioma delle parallele.

A4 Sia r una retta ed A un punto non giacente in r , allora c'è al massimo una retta passante per A e parallela ad r .

¹ In realtà, già dieci anni prima di Hilbert il matematico e logico Giuseppe Peano aveva enunciato chiaramente il metodo assiomatico :

*Si ha così una categoria I di enti, chiamati punti. Questi enti non sono definiti. Inoltre, dati tre punti, si considera una relazione fra essi, indicata con la scrittura $c \hat{I} ab$, la quale relazione non è parimenti definita. Il lettore può intendere col segno I una categoria qualunque di enti, e con $c \hat{I} ab$ una relazione qualunque fra enti di quella categoria; avranno sempre valore tutte le definizioni che seguono, e sussisteranno tutte le proposizioni. Dipendentemente dal significato attribuito ai segni non definiti I e $c \hat{I} ab$, potranno essere soddisfatti, oppure no, gli assiomi. Se un certo gruppo di assiomi è verificato, saranno pure vere tutte le proposizioni che si deducono (in *Principi di geometria logicamente esposti*).*

Da notare che una retta non è necessariamente un insieme di punti e che la relazione di "giacenza" non è necessariamente la relazione di appartenenza. Mostriamo un esempio di teorema geometrico che si può dedurre da tali assiomi.

Teorema. Tutte le rette hanno lo stesso numero di punti. Un fascio proprio di rette contiene tanti punti quanti sono i punti di una retta più uno.

Dim. Sia r una retta e sia P un punto che non passa per r . Allora ad ogni punto Q di r posso associare la retta per P e per Q . Questa corrispondenza è iniettiva ma l'unica retta che non si può ottenere in tale modo è la parallela ad r per Q . In definitiva nel fascio ci sono tanti punti quanti sono quelli di r più 1.

Esistono diversi modelli di tale sistema di assiomi.

Esempio: il piano Euclideo: L'esempio più noto di modello del sistema di assiomi proposto è ottenuto a partire dai numeri reali. Chiamiamo

- *punto* ogni coppia di numeri reali, cioè ogni elemento di R^2 ,
- *retta* ogni insieme di punti verificanti una equazione di primo grado del tipo $ax+by = p$ con a, b e p non tutti nulli .

La relazione di *giacenza* coincide (in questo caso) con quella usuale di appartenenza. Da notare che terne proporzionali di coefficienti a, b e c determinano la stessa retta poiché determinano equazioni con le stesse soluzioni. Che per due punti diversi (x_0, y_0) e (x_1, y_1) passa una ed una sola una retta deriva dall'esame del sistema omogeneo

$$ax_0 + by_0 = p$$

$$ax_1 + by_1 = p$$

nelle incognite a, b, p . Infatti bastano alcune nozioni di base di algebra lineare per provare che tale sistema ammette almeno una soluzione non nulla e che tutte le soluzioni sono proporzionali tra loro. Il primo fatto comporta l'esistenza di una retta. Il secondo fatto che la retta è unica. Non è difficile verificare anche l'assioma delle parallele. Infatti, come è noto, i punti di intersezione di due rette $ax+by = p$ e $a'x+b'y = p'$ si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} ax + by = p \\ a'x + b'y = p' \end{cases}$$

Pertanto le due rette sono parallele se e solo se tale sistema non ammette soluzioni e questo avviene se e solo se i coefficienti a e b sono proporzionali ai coefficienti a', b' . Allora, dato un punto (x_0, y_0) ed una retta r di equazione $ax+by = p$, trovare una retta passante per (x_0, y_0) e parallela ad r equivale a trovare tre numeri a', b', p' tali che

$$\begin{cases} ab' = a'b \\ a'x_0 + b'y_0 = p' \end{cases}$$

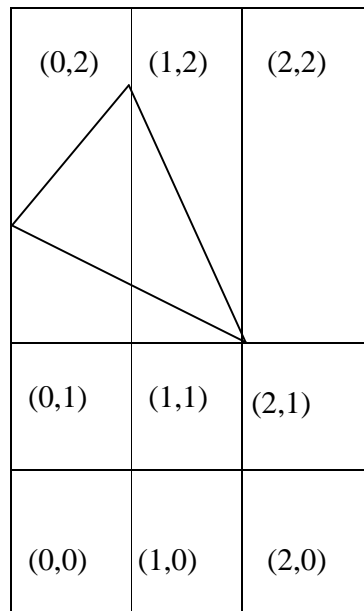
Anche in questo caso si tratta di un sistema omogeneo in tre incognite ed anche in questo caso esiste una soluzione e tutte le soluzioni sono proporzionali tra loro. Ciò prova l'esistenza e l'unicità della retta per (x_0, y_0) e parallela ad r .

Esempio: Le geometrie finite. Ora se al campo dei numeri reali sostituiamo un qualunque altro campo, ad esempio il campo degli interi modulo 3, il sistema di assiomi A1, A2, A3 continua ad essere soddisfatto. In tale caso avremo che il modello di geometria è costituito dai nove punti

$$(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (2,2),$$

mentre una retta sarà costituita dall'insieme dei punti verificanti una equazione di primo grado. Avremo le rette passanti per $(0,0)$ saranno le quattro rette di equazione $x = 0$, $y = 0$, e $y = x$ e $y = 2x$, oppure, equivalentemente, $y = -x$. Le rette che non passano per l'origine avranno equazione $ax+by = 1$. Ad esempio una retta è data da

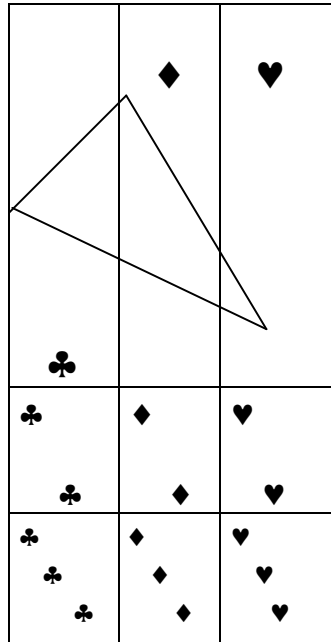
$$\{(x,y) \mid 2x+y = 1\} = \{(0,1), (1,2), (2,0)\}.$$



La geometria delle carte. L'esempio di piano costruito sul campo degli interi modulo 3 può essere travestito in modo più divertente al modo seguente. Consideriamo nove carte di gioco che si ottengono prendendo i numeri 1 2 e 3 e i semi di quadri, fiori e picche. Indicheremo tali carte con $1q, 2q, 3q, 1f, 2f, 3f, 1p, 2p, 3p$.

Chiamiamo *punto* ognuna di tali carte e chiamiamo *retta* un insieme di tre carte tale che

- le tre carte hanno lo stesso numero, oppure
- le tre carte hanno lo stesso seme, oppure
- tra le tre carte non ve ne sono due in cui non compare né uno stesso numero o uno stesso seme.



Allora ad esempio per i punti $1q, 2f$ passa la retta $\{1q, 2f, 3p\}$, per i punti $1q, 1f$, la retta $\{1q, 1f, 1p\}$. È facile rendersi conto che tali rette sono uniche. Inoltre data ad esempio la retta $r = \{1q, 2f, 3p\}$ ed il punto $2q$, la parallela ad r passante per $2q$ è la retta $\{2q, 3f, 1p\}$.

4. Un approccio assiomatico ai numeri reali

In precedenza abbiamo introdotto i numeri reali partendo dall'insieme dei numeri razionali, ossia attraverso un procedimento "costruttivo". Il matematico tedesco D. Hilbert diede una impostazione assiomatica alla teoria dei numeri reali. Noi proponiamo un sistema di assiomi che è diverso da quello proposto da Hilbert preferendo riferirci alla teoria dei campi ordinati completi.

Definizione 1. Chiamiamo *anello unitario commutativo* ogni struttura algebrica $(D, +, \cdot, 0, 1)$ tale che:

- 1) $(D, +, 0)$ è un gruppo commutativo
- 2) $(D, \cdot, 1)$ è una operazione associativa e commutativa con 1 come elemento neutro
3. vale la proprietà distributiva cioè

$$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Proposizione 2. In ogni anello risulta che:

- i) $x \cdot 0 = 0$.
- ii) $x \cdot (-y) = -x \cdot y$.

iii) $x \cdot (-1)$ è l'opposto di x .

iv) $(-1)^2 = 1$.

Dim. Per provare i) osserviamo che per la proprietà distributiva $x \cdot 0 = x \cdot (0+0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$ da cui, sottraendo da entrambi i membri $x \cdot 0$, si ricava che $0 \cdot x = 0$. Per provare ii) osserviamo che $x \cdot (-y) + x \cdot y = x \cdot (-y+y) = x \cdot 0 = 0$. Le rimanenti proprietà sono ovvie.

Definizione 3. Un anello unitario commutativo $(D, +, \cdot, 0, 1)$ è detto *ordinato* se è definita in D una relazione d'ordine totale \leq tale che

$$1) \quad a \leq b \Rightarrow a+c \leq b+c,$$

$$2) \quad c \geq 0, a \leq b \Rightarrow ac \leq bc.$$

Chiamiamo *positivi* gli elementi maggiori di 0 e *negativi* gli elementi minori di 0.

Proposizione 4. In ogni anello ordinato risulta che:

$$i) \quad a \leq b \Rightarrow a-b \leq 0,$$

$$ii) \quad a \leq b \Rightarrow 0 \leq b-a.$$

$$iii) \quad b \geq 0 \Leftrightarrow -b \leq 0.$$

$$iv) \quad c \geq 0, b \geq 0 \Rightarrow b \cdot c \geq 0$$

$$v) \quad c \geq 0, a \leq 0 \Rightarrow ac \leq 0$$

$$vi) \quad c \leq 0, b \leq 0 \Rightarrow b \cdot c \geq 0$$

$$v) \quad 1 \geq 0, -1 \leq 0.$$

Dim. L'implicazione i) si ottiene ponendo $c = -b$ in 1). La ii) si ottiene ponendo $c = -a$. Se in i) si pone $a = 0$ allora si ottiene $b \geq 0 \Rightarrow -b \leq 0$. Se in ii) si pone $b = 0$ si ottiene $a \leq 0 \Rightarrow 0 \leq -a$. In questo modo la iii) è dimostrata. Le rimanenti proprietà si dimostrano in modo analogo.

Definizione 5. Un anello unitario commutativo $(D, +, \cdot, 0, 1)$ è chiamato *campo* se $(D - \{0\}, \cdot, 1)$ è un gruppo.

La struttura algebrica definita dai razionali è un tipico esempio di campo ordinato.

Definizione 6. Un elemento x di un campo ordinato si chiama *infinito positivo* se risulta che $x \geq p \cdot 1$ qualunque sia l'intero p . Chiamiamo *infinito negativo* l'opposto di un infinito positivo. Chiamiamo *infinitesimo positivo (negativo)* un elemento x che sia l'inverso di un elemento infinito positivo (negativo).

Pertanto un elemento positivo di un campo è un infinitesimo positivo se $x \leq 1/p$ per ogni naturale p . Un elemento negativo x è un infinitesimo negativo se $x \geq -1/p$ per ogni naturale p .

Definizione 7. Un campo ordinato $(D, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ si dice *archimedeo* se non ammette elementi infiniti positivi, cioè se $\forall x \in D \exists p \in \mathbb{N}$ tale che $p \cdot 1 \geq x$.

Da notare che un assioma simile lo abbiamo già visto quando abbiamo definito la classe di grandezze omogenee. Il campo dei numeri razionali ed il campo dei numeri reali risulta essere archimedeo. I campi non archimedei sono molto affascinanti perché in essi è possibile sviluppare una teoria degli infiniti e degli infinitesimi. Ad esempio possiamo dire che due elementi x ed y di un campo ordinato sono *infinitamente vicini* se $x-y$ è un infinitesimo.

Infine arriviamo alla più importante proprietà dei campi ordinati, la completezza. Nel seguito dati due sottoinsiemi A e B di un insieme ordinato scriveremo $A \leq B$ per indicare che ogni elemento di A è minore di ogni elemento di B . In tale caso si dice anche che A e B sono *separati*. Chiameremo “*elemento separatore*” della coppia A e B un elemento u tale $A \leq \{u\} \leq B$ cioè un elemento u maggiore di tutti gli elementi di A e minore di tutti gli elementi di B .

Definizione 8. Un campo ordinato si dice *completo* se ogni coppia A e B di sottoinsiemi di D tali che $A \leq B$ ammette un elemento separatore.

Come per l’assioma di Archimede abbiamo già considerato la proprietà di completezza nella teoria delle grandezze omogenee sotto il nome di *continuità*. La cosa non deve sorprendere perché la teoria delle grandezze omogenee costituiva appunto un sostituto della teoria dei numeri reali.

Proposizione 9. Se x è un elemento infinito allora anche $x-1$ è infinito. Ne segue che l’insieme degli elementi infiniti di un campo ordinato non ammette minimo.

Dim. Se $x \geq p \cdot 1$ per ogni intero p allora $x-1 \geq (p-1) \cdot 1$ per ogni intero p . Ciò prova che $x-1$ è infinito.

Teorema 10. Ogni campo completo è archimedeo.

Dim. Supponiamo che $(D, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ sia un campo completo e poniamo

$$A = \{n \cdot 1 : n \in \mathbb{N}\} ; B = \{x \in D : x \text{ è infinito positivo}\}.$$

Supponiamo per assurdo che tale campo non sia archimedeo, allora B è non vuoto. Inoltre, per definizione di elemento infinito positivo abbiamo che $A \leq B$. Sia u un elemento separatore di tale coppia di insiemi, allora u in quanto maggiorante di A è un infinito e quindi appartiene a B . Inoltre u , che è anche minorante di B , appartenendo a B è un minimo di B in contrasto con la proposizione 9.

Una volta che abbiamo dato le definizioni necessarie possiamo passare alla definizione assiomatica dei numeri reali.

Definizione 11. Chiamiamo *campo dei numeri reali* ogni campo completo archimedeo.

Usualmente si usa l'espressione “il campo dei numeri reali” invece di “un campo dei numeri reali”. Questo modo di dire è giustificato dal seguente teorema di cui omettiamo la dimostrazione.

Teorema 12. La teoria dei campi complete archimedei è categorica cioè tutti i campi completi archimedei sono isomorfi tra loro.

4. Sistemi di assiomi per la teoria degli insiemi.

Il metodo assiomatico può sia essere applicato “localmente” a singoli settori della matematica (come la geometria, gli insiemi numerici e così via) oppure può essere utilizzato per tentare di rimettere in piedi la teoria degli insiemi cercando di eliminarne i paradossi. Una volta che si sia trovata una opportuna assiomatizzazione della teoria degli insiemi è possibile poi costruire tutta la matematica come abbiamo fatto nel capitolo precedente. Le assiomatizzazioni della teoria degli insiemi che sono state proposte riescono in questo compito limitando opportunamente

- o il principio di comprensione
- oppure quello di sostanzialità.

Infatti è in base a tali due principi che si produce, ad esempio, il paradosso di Russell.

Limitazione del principio di sostanzialità (la teoria delle classi). La limitazione del principio di sostanzialità si ottiene accettando senza restrizioni il principio di comprensione nel senso che, data una proprietà P , la collezione degli enti verificanti P è sempre una classe. Non sempre le classi hanno però carattere di sostanza e solo le classi per cui ciò avviene hanno il diritto di chiamarsi insiemi. Ora ricordiamo che il carattere di sostanza per una classe si esprime nel fatto che di essa si possa asserire qualche proprietà, e quindi, in termini insiemistici, che essa appartenga ad una classe. Pertanto vengono chiamati *insiemi* quelle classi che sono elementi di qualche altra classe, le altre classi vengono chiamate *classi proprie*. Delle classi proprie non ha senso dire che verificano o meno una proprietà e non ha senso parlare di cardinalità. Allora il paradosso di Russell diviene una dimostrazione che $R = \{X : X \notin X\}$ è una classe e non un insieme. Infatti se fosse un insieme allora avrebbe senso chiedersi se $R \in R$ o meno e quindi si riprodurrebbe il paradosso. Similmente da un tale punto di vista gli altri due paradossi diventano dimostrazioni del fatto che la classe di tutti gli insiemi è la classe degli insiemi con tre elementi sono classi proprie. Questo modo di procedere fu proposto per la prima volta da von Neumann nel 1925 e poi migliorato da altri.

Limitazione al principio di comprensione: Una limitazione del principio di comprensione si ottiene ad esempio con il più debole assioma di isolamento.

Dato un insieme S ed una proprietà P , $\{x \in S : x \text{ verifica } P\}$ costituisce un insieme.

In altri termini l'assioma di isolamento consente solo di "isolare" all'interno di una collezione che sia stata già riconosciuta essere un insieme un opportuno sottoinsieme. Se si sostituisce al principio di comprensione l'assioma di isolamento, l'antinomia di Russell non è più riproducibile. Infatti, data la proprietà $X \notin X$, il principio di isolamento permette solo di affermare che, fissato un insieme S , la collezione $R = \{X \in S \mid X \notin X\}$ è un insieme. Ora una parte dell'argomentazione di Russell si può riprodurre, infatti se si assume che $R \in R$ allora abbiamo che R è (un elemento di S) tale che $R \notin R$. Per quanto riguarda la seconda parte vi sono invece delle difficoltà. Supponiamo infatti che $R \notin R$ allora due sono i casi o $R \in S$ o $R \notin S$. Ma il primo caso è escluso perché altrimenti avremmo che $R \in R$ pertanto possiamo solo concludere che $R \notin S$. Ciò non è affatto assurdo.

Per quanto riguarda il paradosso dell'insieme S di tutti gli insiemi, esso si annulla semplicemente per il fatto che il principio di isolamento permette di definire solo la classe degli insiemi che appartengono ad un dato insieme. Allora, dato un insieme X , non è detto che i singoletti $\{x\}$ con $x \in X$ appartengano ad S . Anzi si osservi un tale paradosso si trasforma in una prova che la classe S di tutti gli insiemi non è un insieme. Infatti se S fosse un insieme allora l'assioma di isolamento coinciderebbe con l'assioma di comprensione (basterebbe riferirsi sempre ad S come all'insieme in cui isolare l'insieme voluto). Ma dall'assioma di comprensione sappiamo che si produce un assurdo, e ciò prova che S non è un insieme.

Infine, per quanto riguarda l'insieme degli insiemi con tre elementi, anche in questo caso il principio di comprensione permette di asserire solo che, dato un insieme I , $T = \{X \in I \mid X \text{ ha tre elementi}\}$ è un insieme. Dato allora un insieme X qualsiasi ed $x \in X$, non è detto che $\{(a,x), (b,x), (c,x)\}$ appartenga ad I e quindi a T .

La limitazione al principio di comprensione è presente nella più diffusa teoria degli insiemi che prende il nome di teoria Zermelo-Frankel. In tale teoria si assumiamo come unici concetti primitivi la nozione di *insieme* e la *relazione di appartenenza* che indichiamo. Pertanto un modello della teoria di Zermelo-Frankel sarà costituito da un insieme con una relazione binaria.

Nel seguito elenchiamo alcuni degli assiomi di tale teoria senza nessuna pretesa di rigore.

A1. Assioma dell'estensionalità: due insiemi che hanno gli stessi elementi sono uguali.

In breve

$$[\forall z(z \in x \Leftrightarrow z \in y)] \Rightarrow x = y$$

Naturalmente è evidente che $x = y \Rightarrow \forall z(z \in x \Leftrightarrow z \in y)$, pertanto da tale assioma segue che $x = y \Leftrightarrow [\forall z(z \in x \Leftrightarrow z \in y)]$.

Tale principio afferma che due insiemi che hanno gli stessi elementi sono uguali, in altre parole due insiemi che hanno la stessa "estensione" coincidono. Ciò differenzia un insieme dal procedimento usato per descriverlo (cioè dalle proprietà che lo definiscono). Per fare un esempio, anche se le proprietà "essere pari" e "terminare per 0, 2, 4, 6 o 8" sono diverse (pur essendo equivalenti) i due insiemi $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è pari}\}$ e $\{x \in \mathbb{N} \mid \text{l'ultima cifra di } x \text{ è } 0, 2, 4, 6 \text{ o } 8\}$ sono uguali. La portata del fatto che in teoria degli insiemi si assume il punto di vista

estensionale è più evidente se si considera il concetto di funzione. Come è noto in teoria degli insiemi si accetta la seguente definizione di funzione:

- chiamiamo *funzione* di N in N una relazione univoca in N , cioè un *sottoinsieme* R di $N \times N$ tale che per ogni $x \in N$ esiste uno ed un solo y tale che $(x,y) \in R$.

Un modo diverso di procedere, che a volte si trova nei libri di scuola, potrebbe essere il seguente:

- chiamiamo *funzione* una *legge* o un *processo* che permette di ottenere un numero y una volta che si sia fissato un numero x .

Una tale definizione appare più intuitiva ma meno rigorosa. Infatti è poco chiaro che cosa si debba intendere per "legge" o "processo". Inoltre in generale noi accettiamo che, ad esempio, equazioni come

$$y = (x-1)^2 - x^2$$

e

$$y = x^2 + 1$$

rappresentano la stessa funzione pur rappresentando processi di calcolo diversi. Il fatto che le due funzioni siano la stessa significa che quello che interessa è il fatto che se si fissa x in entrambi i casi si ottiene lo stesso y . In altre parole quello che interessa è l'estensione $\{(x,y) \in R \times R : y = (x-1)^2 - x^2\}$ della proprietà $y = (x-1)^2 - x^2$ che, di fatto, coincide con l'estensione $\{(x,y) \in R \times R : y = x^2 + 1\}$ della proprietà $y = x^2 + 1$. Pertanto l'idea di funzione è "estensionale"; quello che interessa è solo la "tabella" (l'insieme delle coppie) non il modo di calcolare tale tabella.

Un tale punto di vista, tipico dei matematici, potrebbe non essere accettato da un informatico che tiene anche conto dei tempi di calcolo di una funzione. In tale caso è evidente che il punto di vista estensionale non è più valido e che $y = (x-1)^2 - x^2$ e $y = x^2 + 1$ denotano cose diverse.

A2. Assioma dell'insieme vuoto: esiste un insieme che non ha elementi e che chiameremo *insieme vuoto*:

$$\exists z (\forall x (\neg x \in z)).$$

Dall'assioma di estensionalità segue che esiste un solo insieme vuoto che indicheremo con \emptyset .

Nota: Insiemi ed elementi. Da questi due assiomi segue che la teoria parla solo di insiemi e non di "elementi". Infatti se accettassimo la presenza di un "elemento" a che non contiene a sua volta elementi, allora a dovrebbe coincidere con l'insieme vuoto. Ciò significa che non ha senso considerare come insieme un insieme di oggetti che non siano a loro volta insiemi. Ad esempio l'insieme delle monete che ho in tasca non rientra in tale teoria. Questo rende il tutto poco naturale ma evita molte complicazioni. Un modo diverso di procedere sarebbe accettare che esistano due tipi di oggetti matematici: gli insiemi e gli elementi che non sono insiemi. Per gli elementi che non siano insiemi non vengono imposti i due assiomi A1 e A2.

A3. Assioma del singoletto. Dato un insieme x esiste un insieme z che ha x come unico elemento:

$$\forall x \exists z (y \in z \Leftrightarrow y = x)$$

Per l'assioma di estensionalità l'insieme z è unico e lo denoteremo con $\{x\}$. Questi primi assiomi permettono di asserire l'esistenza di un buon numero di insiemi. Infatti siamo sicuri dell'esistenza degli insiemi $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \dots$

Un modello dei primi tre assiomi. Nello spirito del metodo assiomatico non dobbiamo necessariamente interpretare gli oggetti che abbiamo chiamato "insiemi" e la relazione che abbiamo chiamato di "appartenenza" nel modo usuale. In effetti per avere una interpretazione si deve avere un insieme più una relazione binaria. Ad esempio se chiamiamo *insieme* un numero naturale e poniamo $n \in m$ se m è il successivo di n allora abbiamo che gli assiomi A1, A2 ed A3 sono soddisfatti. Infatti A1 segue dal fatto che la funzione successore è iniettiva. A2 è vera perché 0 non è successore di nessun elemento. A3 è verificata perché ogni numero naturale ha uno ed un solo successore. Non è invece verificato il seguente assioma.

A4. Assioma dell'unione di due insiemi. Dati due insiemi x ed y esiste un insieme che ha come elementi o gli elementi di x oppure gli elementi di y .

$$\forall x \forall y (\exists z (z' \in z \Leftrightarrow z' \in x \vee z' \in y))$$

L'insieme la cui esistenza è assicurata da tale assioma viene indicato con $x \cup y$. Dall'assioma A3 e l'assioma A4 segue che dati due insiemi x_1 e x_2 esiste l'insieme $\{x_1, x_2\} = \{x_1\} \cup \{x_2\}$ caratterizzato dal contenere solo gli elementi x_1, x_2 . Più in generale, dati gli insiemi x_1, \dots, x_n esiste l'insieme $\{x_1, \dots, x_n\} = \{x_1\} \cup \dots \cup \{x_n\}$ che ha x_1, \dots, x_n come unici elementi. Da notare che i numeri naturali non verificano A4 in quanto dati x ed y , con $x \neq y$, non è vero che esiste un z che è successore sia di x che di y .

L'assioma dell'unione di due insiemi può essere esteso in modo da ottenere l'unione di una classe qualunque di insiemi.

A5. Assioma dell'unione degli elementi di una classe. Per ogni insieme z esiste un insieme z' tale che

$$x \in z' \Leftrightarrow \exists y (y \in z \wedge x \in y).$$

Per l'assioma di estensionalità l'insieme z' è unico, nel seguito lo denoteremo con $\cup z$ oppure $\cup \{x : x \in z\}$ e parleremo di *unione degli elementi di z* .

Dati due insiemi x ed y diremo che x è una parte di y e scriveremo $x \subseteq y$ se ogni elemento di x è anche un elemento di y , cioè se vale l'implicazione

$$z \in x \Rightarrow z \in y.$$

A6. Assioma dell'insieme delle parti: per ogni insieme x esiste un insieme y costituito da tutte e sole le parti di x :

$$\forall x \exists y (z \in y \Leftrightarrow z \subseteq x).$$

Per l'assioma di comprensione l'insieme y è unico. Denoteremo tale insieme con $P(x)$.

Il prossimo assioma postula l'esistenza di un insieme infinito. Per fare questo dobbiamo definire la nozione di funzione e poi quella di equipotenza. Dati due insiemi x ed y chiamiamo *coppia* di elementi x ed y l'insieme $\{x, \{x, y\}\}$. Che tali insieme esista segue dal fatto che è l'unione degli insiemi $\{x\}$ ed $\{\{x, y\}\}$. Segue la solita definizione di prodotto cartesiano, di relazione e di funzione. Ciò permette di definire la nozione di equipotenza.

Definizione Chiameremo *infinito* un insieme che sia equipotente ad una sua parte propria.

A7. Assioma dell'infinito: esiste un insieme infinito.

I prossimi due assiomi coinvolgono la nozione di *proprietà o relazione scritta nel linguaggio delle teoria degli insiemi*. Una definizione rigorosa di tale concetto, che è possibile solo nell'ambito della logica matematica, richiederebbe troppo tempo. Qui ci limitiamo a dire che intendiamo riferirci a tutte le proprietà che possono essere descritte utilizzando solo il simbolo di appartenenza \in ed eventualmente i connettivi logici "non", "esiste", "per ogni", "oppure", "e".

A8. Assioma di isolamento: sia p una proprietà nel linguaggio della teoria degli insiemi, allora per ogni insieme z esiste un insieme z' tale che

$$x \in z' \Leftrightarrow x \in z \text{ ed } x \text{ verifica } p.$$

L'insieme z' viene indicato anche con $\{x \in z : x \text{ verifica } p\}$.

Per completezza enunciamo anche l'ultimo assioma della teoria *ZF* che non è molto intuitivo ma molto utile per motivi tecnici. Nel seguito chiamiamo *funzionale* una proprietà $p(x, y)$ scritta nel linguaggio della teoria degli insiemi tale che per ogni x esiste un unico y per cui $p(x, y)$ sia vera. In altre parole una proprietà funzionale è una proprietà a due posti che quando venga interpretata definisce una funzione. Data una proprietà funzionale $p(x, y)$ ed un insieme z chiamiamo *immagine di z tramite $p(x, y)$* un insieme z' tale che per ogni $x \in z$ esiste $x \in z'$ tale che $p(x, y)$ sia vera. Il prossimo assioma assicura che l'immagine di un insieme tramite una proprietà funzionale è ancora un insieme.

A9. Assioma di sostituzione: Sia $p(x, y)$ una proprietà funzionale. Allora per ogni insieme z esiste un insieme z' che è immagine di z tramite $p(x, y)$.

9. Due assiomi particolari: l'assioma della scelta e l'ipotesi del continuo.

L'elenco dei possibili assiomi per la teoria degli insiemi non si esaurisce con quelli che abbiamo elencato. Ad esempio è di particolare importanza l'assioma della scelta. Per poterlo enunciare diamo la seguente definizione:

Definizione 1. Se Σ è un insieme costituito da insiemi non vuoti, dicesi *funzione di scelta* su Σ ogni applicazione $f: \Sigma \rightarrow \cup_{X \in \Sigma} X$ tale che $f(X) \in X$ qualunque sia $X \in \Sigma$.

La funzione di scelta in un certo senso "sceglie" in ogni insieme X un suo elemento $f(X)$.

A10. (Assioma della scelta). Ogni classe Σ di insiemi non vuoti ammette una funzione di scelta.

In altre parole l'assioma della scelta asserisce l'esistenza di una legge che consenta di "scegliere" un elemento in ogni insieme appartenente a Σ . Un modo ovviamente equivalente di formulare tale assioma è utilizzando la nozione di famiglia invece che quella di classe. Infatti, data una famiglia $(A_i)_{i \in I}$ di insiemi non vuoti possiamo chiamare *funzione di scelta* ogni funzione $f: I \rightarrow \cup_{i \in I} A_i$ tale che $f(i) \in A_i$.

A10'. Per ogni famiglia $(A_i)_{i \in I}$ di insiemi non vuoti esiste una funzione di scelta.

La teoria che si ottiene aggiungendo a ZF tale assioma viene denotata con ZFC . E' difficile capire perché si debba assumere come assioma una cosa tanto evidente ed intuitiva. Il fatto è che la nostra intuizione si basa su insiemi finiti e nel caso di classi finite l'assioma della scelta è conseguenza degli altri assiomi.

Proposizione 2. Se si considera una classe Σ che sia finita, allora l'assioma della scelta può essere dedotto dagli assiomi di ZF .

Dim. Infatti se $\Sigma = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ è un insieme finito di insiemi non vuoti, allora esistono $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots, x_n \in X_n$. Pertanto esistono le coppie $(X_1, x_1), (X_2, x_2), \dots, (X_n, x_n)$. Per l'assioma della coppia possiamo asserire che esiste anche l'insieme $\{(X_1, x_1), (X_2, x_2), \dots, (X_n, x_n)\}$ che è la funzione di scelta cercata.

Proviamo a fare un passo in avanti e supponiamo di avere una classe infinita Σ di insiemi non vuoti. In tale caso, è ancora possibile "scegliere" un elemento x in ciascun X in Σ . Tuttavia questa volta nulla ci assicura che esista un insieme costituito da tutte le coppie (X, x) che si sono ottenute in questo modo. In altre parole niente ci assicura che la totalità di tali coppie costituisca una funzione.

La validità di tale assioma a noi pare scontata. Tuttavia quando fu proposto per la prima volta esso ha suscitato molte perplessità e reazioni negative. Infatti si aveva la tendenza a credere che un insieme esiste solo se si riescono a descrivere i suoi elementi tramite una proprietà comune. Similmente si era portati a pensare che una funzione esiste solo se è possibile definire in modo preciso quale è la legge che associa l'input all'output. Allora chi ci assicura che esiste sempre un criterio generale che permetta di scegliere all'interno di ogni insieme in Σ un suo elemento ?

Scarpe e calzini. Per ben chiarire questo fatto è utile e divertente illustrare l'esempio di Bertrand Russel. Supponiamo preliminarmente di avere una famiglia infinita $(S_i)_{i \in I}$ di paia di scarpe (possiamo visualizzare S_i come una scatola su cui è attaccata una etichetta i per distinguerla dalle altre) e di voler individuare una "funzione di scelta" che permetta di scegliere in ogni S_i una scarpa $f(i) \in S_i$ particolare. In questo caso non ci sono difficoltà, possiamo scegliere in ogni paio, ad esempio, la scarpa destra. Supponiamo invece di disporre

una famiglia infinita $(C_i)_{i \in I}$ di paia di calzini. Allora poiché i due calzini di un dato paio non sono distinguibili, non sarà semplice definire una funzione di scelta che consenta di scegliere in ogni paio C_i un particolare calzino. Il procedere “scegliendo a caso” non sembra fare parte dell’universo matematico. L’assioma della scelta afferma che una tale funzione di scelta esiste e questo indipendentemente dal fatto che si sia capaci di descriverla.

Il seguente teorema mostra come, a volte, facciamo uso comune di questo postulato senza rendercene conto. Ad esempio ricordiamo la nozione di prodotto cartesiano nel caso di infiniti insiemi.

Definizione 2. Sia $(S_i)_{i \in I}$ una famiglia di insiemi. L’insieme delle applicazioni $f : I \rightarrow \cup_{i \in I} S_i$ tali che $f(i) \in S_i$, per ogni $i \in I$, viene detto *prodotto cartesiano* della famiglia $(S_i)_{i \in I}$ e lo si indica con $\times_{i \in I} S_i$.

Un elemento $f \in \times_{i \in I} S_i$ può essere quindi visto come una famiglia $f = (f_i)_{i \in I}$ (si è utilizzata la notazione abbreviata $f_i = f(i)$) di elementi di $\cup_{i \in I} S_i$ tale che $f_i \in S_i$ per ogni $i \in I$.

Teorema 3. L’assioma della scelta è equivalente a dire che il prodotto cartesiano di insiemi non vuoti è non vuoto. In altri termini è equivalente a dire che, data una qualunque famiglia di insiemi $(A_i)_{i \in I}$:

$$A_i \neq \emptyset \quad \forall i \in I \Rightarrow \times_{i \in I} A_i \neq \emptyset.$$

Dim. Dobbiamo ricordare che il prodotto cartesiano $\times_{i \in I} A_i$ si definisce come l’insieme di tutte le funzioni $f : I \rightarrow \cup_{i \in I} A_i$ tali che $f(i) \in A_i$ e quindi che tale prodotto coincide proprio con l’insieme delle funzioni di scelta per la famiglia $(A_i)_{i \in I}$.

Naturalmente, stante la Proposizione 2, per poter dimostrare che il prodotto cartesiano di un numero finito di insiemi non vuoti è non vuoto non è necessario l’assioma della scelta.

Va sottolineato che molti altri teoremi, di fondamentale importanza nella teoria degli insiemi, sono equivalenti con l’assioma della scelta, tra i più famosi ricordiamo:

• **Lemma di Zorn.** *Se (S, \leq) è un insieme parzialmente ordinato tale che ogni catena ha maggiorante, allora (S, \leq) ha un elemento massimale.*

• **Principio del buon ordinamento.** *In ogni insieme X può essere definito un buon ordinamento.*

Si pone il problema se l’assioma della scelta sia in realtà un teorema della teoria degli insiemi. In proposito vale il seguente teorema la cui dimostrazione, che richiede nozioni avanzate di logica matematica, omettiamo.

Teorema 3. L’assioma della scelta è indipendente dai rimanenti assiomi.

Un altro assioma particolarmente importante è l'ipotesi del continuo che abbiamo già incontrato nel capitolo precedente. Abbiamo visto che la potenza di $P(N)$ è strettamente maggiore di quella di N . Appare allora naturale chiedersi se esistono insiemi che hanno potenza maggiore del numerabile e minore di quella di $P(N)$. Cantor formulò l'ipotesi per cui non esiste un tale insieme. Trasformiamo questa ipotesi in un assioma.

A11. Ipotesi del continuo. Non esiste un insieme che abbia potenza strettamente maggiore del numerabile e strettamente minore del continuo.

Detto in altri termini l'ipotesi del continuo afferma che nel piano euclideo esistono solo insiemi finiti, numerabili o aventi la potenza del continuo. Per molti anni nessun matematico ha saputo confutare o provare l'ipotesi del continuo. Nel 1963 il logico matematico Cohen ha dato una risposta a tale ipotesi mostrando che è indipendente dai rimanenti assiomi della teoria degli insiemi.

Teorema 4. (Teorema di Cohen). L'ipotesi del continuo è indipendente dai rimanenti assiomi.

In altre parole l'ipotesi del continuo non può né essere provata né essere confutata a partire dai sistemi di assiomi che usualmente vengono accettati per la teoria degli insiemi. Più in generale è stata provata anche l'indipendenza della seguente asserzione.

Ipotesi generalizzata del continuo. Dato un insieme infinito S non esiste un insieme che abbia potenza strettamente maggiore di S e strettamente minore di $P(S)$.

L'ipotesi generalizzata del continuo può essere espressa anche utilizzando la teoria dei numeri cardinali.

Ipotesi generalizzata del continuo. Per ogni cardinale x non esiste nessun cardinale tra x e 2^x .

Se si accetta tale ipotesi i cardinali possono essere ordinati nella seguente successione crescente:

$$1 < 2 < 3 < \dots < \aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} \dots$$

ed tra due elementi della successione non è possibile trovare nessun altro cardinale.

In definitiva:

risultano indipendenti dal sistema-base degli assiomi per la teoria degli insiemi sia l'ipotesi del continuo che l'assioma della scelta.

Si ripresenta allora per la teoria degli insiemi la stessa situazione dell'assioma delle parallele in geometria. Così come coesistono geometrie euclidee e geometrie non euclidee, è possibile sviluppare sia teorie degli insiemi in cui vale l'ipotesi del continuo che teorie in cui vale l'ipotesi opposta.

Da notare che, oltre che dai paradossi, che si spera possano essere eliminati da una opportuna assiomatizzazione, il ruolo della teoria degli insiemi viene messo in crisi ancora di

più dalle dimostrazioni di indipendenza. Abbiamo già visto che l'indipendenza dell'assioma delle parallele in geometria con il mostrare la possibilità di più geometrie aveva tolto il ruolo centrale che la geometria euclidea aveva sempre assunto. Allo stesso modo, l'indipendenza dell'ipotesi del continuo con il mostrare la possibilità di più teorie degli insiemi diverse tra loro poneva il problema di quale fosse quella giusta e toglieva quindi il carattere assoluto che si pensava avesse l'intuizione della nozione di insieme.

Problema. Sia X un insieme numerabile di punti di un foglio di carta e supponiamo che una macchia di inchiostro cada sul foglio in modo da coprire X . Dire quale è la cardinalità della macchia di inchiostro.

7. Lo strutturalismo

Abbiamo visto con i Fondamenti della geometria di Hilbert il primo e più importante esempio di applicazione del moderno metodo assiomatico. È necessario però specificare che tale metodo attualmente viene applicato in modo completamente diverso che prende il nome di *strutturalismo*. Tra i fautori di tale metodo, che vengono spesso chiamati strutturalisti per il loro puntare l'attenzione sulle strutture (algebriche, topologiche, d'ordine), ricordiamo il gruppo di matematici francesi che si autodefiniscono Bourbakisti. Nel seguito ritorneremo ad esaminare le differenze tra l'approccio di Hilbert, che può essere chiamato *fondazionale* e quello strutturalista. In questo paragrafo cominciamo col dare qualche idea generale della nozione di struttura matematica.

Definizione 1. Dato un insieme S chiamiamo *relazione n -aria* un sottoinsieme R di S^n , chiamiamo *operazione n -aria* ogni funzione $h : S^n \rightarrow S$.

In generale le operazioni sono unarie o binarie, le relazioni sono binarie. Una struttura matematica è un insieme D con delle operazioni e delle relazioni ed alcuni elementi che giocano un ruolo particolare (come ad esempio gli elementi neutri).

Definizione 2. Una *struttura del primo ordine* è un oggetto matematico del tipo $(D, h_1, \dots, h_n, R_1, \dots, R_m, c_1, \dots, c_k)$ con D insieme non vuoto detto *dominio*, h_1, \dots, h_n operazioni, R_1, \dots, R_m relazioni e c_1, \dots, c_k elementi di S .

Se non esistono relazioni allora la struttura prenderà il nome di *struttura algebrica*, se non esistono operazioni prenderà il nome di *struttura relazionale*. I gruppi sono esempi di strutture algebriche, gli insiemi ordinati sono esempi di strutture relazionali. Gli anelli ordinati (come \mathbb{Z}) costituiscono un esempio di struttura algebrica in cui sono presenti sia una relazione che operazioni.

Definizione 3. Due strutture

$$(D, h_1, \dots, h_n, R_1, \dots, R_m, c_1, \dots, c_k) \text{ e } (D', h'_1, \dots, h'_n, R'_1, \dots, R'_m, c'_1, \dots, c'_k)$$

si dicono *dello stesso tipo* se

- i) per ogni i , h_i ed h'_i hanno lo stesso numero di variabili
- ii) per ogni j , R_j e R'_j si applicano allo stesso numero di elementi.

Ad esempio gli anelli unitari ed i campi sono strutture dello stesso tipo poiché sono forniti di un prodotto, di una somma, di costanti 0 ed 1. I campi ordinati sono di tipo diverso dai campi poiché hanno anche una relazione d'ordine. Nel seguito se R è una relazione su un insieme D ed $X \subseteq D$, allora la restrizione di R ad X è la relazione $R \cap X^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 \in X, \dots, x_n \in X, (x_1, \dots, x_n) \in R\}$. Denotiamo tale restrizione con R/X .

Definizione 4. Una *sottostruttura* di una struttura $S = (D, h_1, \dots, h_n, R_1, \dots, R_m, c_1, \dots, c_k)$ è una struttura $S' = (D', h'_1, \dots, h'_n, R'_1, \dots, R'_m, c'_1, \dots, c'_k)$, dello stesso tipo di S , tale che:

- i) $D' \subseteq D$
- ii) $h'_i = h_i/D'$
- iii) $R'_i = R_i/D'$
- iv) $e'_i = e_i$.

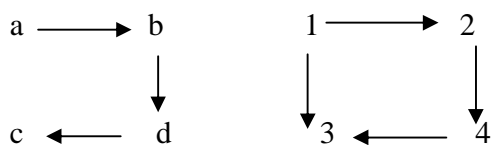
Pertanto una sottostruttura di S si ottiene fissando una parte D' di D che sia stabile rispetto alle operazioni h_1, \dots, h_n e che contenga le costanti c_1, \dots, c_k .

Definizione 5. Siano $(D, h_1, \dots, h_n, R_1, \dots, R_m, c_1, \dots, c_n)$ e $(D', h'_1, \dots, h'_n, R'_1, \dots, R'_m, c'_1, \dots, c'_n)$ due strutture, chiamiamo *omomorfismo* una funzione $f: S_1 \rightarrow S_2$ tale che:

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_n) \in R_i &\Rightarrow (f(x_1), \dots, f(x_n)) \in R'_i \\ f(h_i(x_1, \dots, x_n)) &= h'_i(f(x_1), \dots, f(x_n)) \\ f(c_i) &= c'_i. \end{aligned}$$

Diciamo che f è un *isomorfismo* se è un omomorfismo biiettivo il cui inverso è ancora un omomorfismo. Diciamo che f è una *immersione* se è un isomorfismo tra $(D, h_1, \dots, h_n, R_1, \dots, R_m, c_1, \dots, c_n)$ ed una sottostruttura di $(D', h'_1, \dots, h'_n, R'_1, \dots, R'_m, c'_1, \dots, c'_n)$.

Da notare che la nozione di isomorfismo per le strutture relazionali è leggermente diversa da quella data per le strutture algebriche in cui non si richiede che l'inverso f^{-1} sia ancora un omomorfismo perché ciò accade automaticamente. Invece per le strutture relazionali tale ipotesi è essenziale poiché esistono omomorfismi invertibili il cui inverso non è un omomorfismo. Ad esempio consideriamo due relazioni R_1 ed R_2 rappresentate dai due grafi



e sia f la funzione definita da $f(a) = 1, f(b) = 2, f(c) = 3, f(d) = 4$. Allora è immediato che f è un omomorfismo invertibile il cui inverso non è un omomorfismo in quanto $1 R_1 3$ ma non è vero che $f^{-1}(1) R_2 f^{-1}(3)$.

Si pone ora il problema se, data una relazione di equivalenza \equiv in un insieme S in cui siano state definite relazioni ed operazioni se tali relazioni ed operazioni possono essere definite

anche nel quoziente S/\equiv . Ad esempio, supponiamo che in S sia definita una operazione binaria $+$, allora ha senso, date due classi $X \in S/\equiv$ e $Y \in S/\equiv$, proporre il seguente algoritmo

- prendi un elemento $x \in X$
- prendi un elemento $y \in Y$
- calcola $x+y$
- considera la classe $[x+y]$.

Ma perché una tale definizione funzioni il risultato di un tale algoritmo non deve dipendere dal modo come x ed y sono scelti in X ed Y . In altre parole deve accadere che:

$$x \equiv x' \text{ e } y \equiv y' \Rightarrow x+y \equiv x'+y'$$

Si perviene allora alla seguente definizione:

Definizione 6. Dato un insieme S ed una relazione di equivalenza \equiv , diciamo che una operazione n -aria $h : S^n \rightarrow S$ è *compatibile* con \equiv se risulta:

$$x_1 \equiv x'_1, \dots, x_n \equiv x'_n \Rightarrow h(x_1, \dots, x_n) \equiv h(x'_1, \dots, x'_n)$$

Data una relazione n -aria R , diciamo che \equiv è *compatibile con R* se, per ogni x, x', y, y'

$$(x_1 \equiv x'_1, \dots, x_n \equiv x'_n) \Rightarrow (x_1, \dots, x_n) \in R \Leftrightarrow (x'_1, \dots, x'_n) \in R.$$

Esempio: Dato un intero m , si consideri in Z la relazione di *congruenza modulo m* , cioè la relazione definita dal porre $x \equiv y$ se e solo se $x-y$ è un multiplo di m . Allora sia l'addizione che la moltiplicazione sono operazioni compatibili con tale equivalenza.

Problema: Consideriamo la relazione \equiv in Z definita dal considerare equivalenti due numeri che abbiano gli stessi divisori primi. Ad esempio avremo che $6 \equiv 18$ ma 6 non è equivalente a 730 e la classe $[6]$ contenente 6 è costituita da tutti i numeri che si possono costruire moltiplicando opportunamente 2 e 3 , $[6]=\{6, 12, 18, \dots\}$. Ancora, il numero 7 è equivalente solo ad una sua potenza e $[7]=\{7, 49, \dots\}$.

- \equiv è compatibile con la moltiplicazione ?
- \equiv è compatibile con l'addizione ?

Esempio. In Z consideriamo l'ordinamento usuale e sia \equiv la congruenza modulo 5 . In tali ipotesi $6 \equiv 1$, $5 \equiv 5$ ma pur essendo $1 < 5$ non è vero che $6 < 5$. Pertanto la congruenza modulo 5 non è compatibile con l'ordinamento in Z .

Esercizio. Consideriamo nell'insieme $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ dei primi dieci numeri naturali, in cui è definita la solita relazione d'ordine le seguenti partizioni

$$P1 = \{\{1,2,10\}, \{3,4,5,6,9\}, \{7,8\}\}.$$

$$P2 = \{\{1,2,3,4\}, \{5,6,7\}, \{8,9,10\}\}$$

Tali partizioni determinano a loro volta due relazioni di equivalenza. Dire quale delle due è una congruenza e perché.

Definizione 7. Data una struttura matematica $S = (D, h_1, \dots, h_n, R_1, \dots, R_m, c_1, \dots, c_n)$ chiamiamo *congruenza* una relazione di equivalenza \equiv in D che sia compatibile sia con le operazioni che con le relazioni. Chiamiamo *quoziente* di S modulo \equiv , la struttura

$$S/\equiv = (D/\equiv, h'_1, \dots, h'_n, R'_1, \dots, R'_m, [c_1], \dots, [c_n])$$

dove si è posto

$$h'_i([x_1], \dots, [x_n]) = [h_i(x_1, \dots, x_n)],$$

$$R'_i = \{([x_1], \dots, [x_n]) : (x_1, \dots, x_n) \in R_i\}.$$

8. Categoricalità, consistenza, indipendenza

Nel seguito indicheremo con T un sistema di assiomi per una teoria, indicheremo con α una asserzione e con l'espressione $T \vdash \alpha$ il fatto che α sia un teorema di T . Elenchiamo alcune caratteristiche che può avere una teoria.

Definizione 1. Una teoria T viene detta *categorica* se tutti i suoi modelli sono isomorfi tra loro.

Quando una teoria è categorica a volte si dice anche che “tutti i modelli coincidono a meno di isomorfismi”.

Esempi: La teoria dei gruppi non è categorica (ammette per esempio sia modelli finiti che modelli infiniti). La teoria degli anelli non è categorica (basti pensare all'anello \mathbb{Z} degli interi ed all'anello \mathbb{Q} dei numeri razionali). La teoria degli insiemi ordinati non è categorica (l'intervallo $[0,1]$ e l'intervallo aperto $(0,1)$ non sono isomorfi perché il primo contiene un minimo ed il secondo no).

Esempi: La teoria delle terne di Peano è categorica in quanto due terne di Peano sono isomorfe tra loro. La teoria dei gruppi con cinque elementi è categorica. Il sistema di assiomi della geometria euclidea è categorico.

Definizione 2. Una teoria T viene detta *consistente* se non esiste nessuna asserzione α tale che $T \vdash \alpha$ e $T \vdash \neg\alpha$.

Il modo più semplice per provare che una teoria è consistente è mostrare che ammette un modello, cioè una struttura matematica che verifica tutti gli assiomi della teoria. Infatti se la teoria ammette un modello M e se esistesse per assurdo α tale che $T \vdash \alpha$ e $T \vdash \neg\alpha$, allora in tale modello l'asserzione α dovrebbe essere sia vera che falsa.

Esempi: La teoria dei gruppi è consistente. Infatti se la teoria dei gruppi fosse inconsistente allora, preso ad esempio il gruppo additivo degli interi relativi $(\mathbb{Z}, +)$, in tale gruppo dovrebbe valere sia α che $\neg\alpha$. Un esempio di teoria inconsistente è dato dalla teoria degli insiemi, come mostrano le antinomie. D'altra parte tutte le teorie studiate in algebra sono consistenti (altrimenti non avrebbe senso studiarle).

Esempi: Un esempio di teoria inconsistente è la teoria T degli insiemi ordinati finiti che non hanno elementi minimali. Infatti se un insieme ordinato (S, \leq) non ha elementi minimali, allora preso un elemento $x \in S$ esiste un $x_1 < x$. Poiché x_1 non può essere minimale allora esiste $x_2 < x_1$, ... procedendo in questo modo si prova l'esistenza di una successione infinita di elementi x_n di S tutti diversi tra loro. Ciò prova che esistono infiniti elementi in S . Pertanto in T può essere provata sia l'asserzione "esistono infiniti elementi" che l'asserzione "non esistono infiniti elementi".

Definizione 3. Una teoria viene detta *indipendente* se non capita mai che un assioma $\alpha \in T$ possa essere provato dai rimanenti assiomi $T - \{\alpha\}$.

In generale le teorie che si studiano sono, oltre che consistenti, anche indipendenti. Infatti se un assioma fosse dimostrabile a partire da altri, allora lo si potrebbe semplicemente cancellare senza alterare la teoria stessa.

Definizione 4. Data una teoria T diciamo che una asserzione α è *indipendente* da T se non accade né che $T \vdash \alpha$ né che $T \vdash \neg \alpha$ cioè α non può essere né provata né confutata a partire dagli assiomi di T . Una teoria T è detta *completa* se non esistono asserzioni indipendenti da T , cioè ogni asserzione si può o provare o confutare in T . Intuitivamente una teoria completa è la descrizione completa di un dato modello.

Esempio: Sia T l'insieme degli assiomi della geometria euclidea tranne l'assioma delle parallele e sia α l'assioma delle parallele. Allora abbiamo visto che α è indipendente da T .

Esempio: Ad esempio si T la teoria dei gruppi ed α la proprietà commutativa, allora α non può essere dimostrata (perché in tale caso tutti i gruppi sarebbero commutativi). D'altra parte nemmeno $\neg \alpha$ può essere dimostrata (perché in tale caso tutti i gruppi sarebbero commutativi). Pertanto α è indipendente da T . Questo mostra anche che la teoria dei gruppi non è completa.

Per capire la differenza tra i due punti di vista, ricordiamo che in Hilbert il metodo assiomatico ha un ruolo fondazionale, esso pertanto non vuole essere uno strumento con cui costruire una nuova matematica ma piuttosto un mezzo per giustificare la matematica già esistente. Non a caso i *Fondamenti della Geometria* di Hilbert rappresentano un rifacimento, senza imperfezioni dal punto di vista assiomatico, della geometria di Euclide e che esso si mantiene abbastanza vicino all'originale. Per Hilbert pertanto la bontà di un sistema di assiomi si misura nella capacità di individuare esattamente "l'oggetto matematico" che si vuole fondare (nel caso della geometria lo spazio euclideo).

Per la scuola strutturalista il metodo assiomatico viene invece utilizzato per cogliere la struttura comune a diversi rami della matematica allo scopo di unificare trattazioni diverse. È una scelta dettata da questioni di economia e di organizzazione del lavoro, non da esigenze di fondazione o di analisi critica. Ad esempio gli assiomi della teoria dei gruppi colgono proprietà comuni a strutture matematiche disparate come il gruppo additivo dei reali, il gruppo moltiplicativo dei reali, il gruppo delle isometrie del piano, il gruppo delle permutazioni di un insieme in sé, e così via. In questo caso la bontà di tale teoria si misura nella sua capacità ad abbracciare quanti più "oggetti matematici" in modo che ogni teorema della teoria dei gruppi ci dia delle informazioni più generali possibile. Per gli strutturalisti se una teoria ha un solo modello (a meno di isomorfismi) allora non è molto utile. Infatti se si vuole appurare se una asserzione α è conseguenza o meno degli assiomi della teoria allora tanto vale di andare a vedere direttamente se α vale su tale modello. Consideriamo ad esempio l'intero sistema di assiomi di Hilbert; si sa che tale sistema è categorico, cioè tutti i

modelli sono isomorfi tra loro e sono equivalenti al modello analitico (cioè ad R_2). Allora dovendo verificare se una proposizione è vera oppure no, non conviene cercare di dedurla dal sistema di assiomi; è più semplice verificarne direttamente la validità su R_2 mediante alcuni semplici calcoli.

9. Due modi di concepire il metodo assiomatico: fondazionale e strutturalista.

Per comprendere i diversi significati che può assumere il metodo assiomatico, confrontiamo su alcune questioni fondamentali le idee di Euclide, il punto di vista strutturalista e quello fondazionale.

Intuizione.

Euclide. In Euclide l'intuizione è lo strumento mediante il quale si perviene alla conoscenza degli enti matematici e delle loro proprietà fondamentali. Che gli assiomi, per meglio dire i postulati, siano completamente intuitivi è cosa essenziale perché solo questa loro immediatezza assicura la bontà di tutta la teoria che si vuole costruire (e rende possibile "postulare" per una loro accettazione). In definitiva la scelta del sistema di assiomi poggia direttamente sulla intuizione ed è, in un certo senso, ad essa successiva. Naturalmente l'intuizione non deve invece essere uno strumento di dimostrazione anche se essa conserva un ruolo euristico (in ciò Euclide non differisce dai moderni matematici). L'intuizione non ci conduce ad errori ed è solo per motivi di "purezza intellettuale" che non bisogna servirsene in una trattazione scientifica di un argomento.

Hilbert. In Hilbert, poiché il metodo assiomatico ha lo scopo di fondare un settore della matematica preesistente alla assiomatizzazione, un adeguato sistema di assiomi per la geometria deve solo essere abbastanza potente da permettere di ottenere tutti i teoremi della geometria euclidea. Non è detto perciò che i singoli assiomi debbano essere "intuitivi". Naturalmente, nel caso in questione, gli assiomi di Hilbert ereditano il carattere intuitivo degli assiomi di Euclide ma, se ne avesse avuto bisogno, Hilbert non avrebbe esitato ad introdurre un sistema di assiomi completamente diverso il cui requisito avrebbero dovuto essere solo di essere capace di dimostrare in maniera elegante e rapida l'insieme delle proposizioni della geometria euclidea. L'intuizione comunque può essere forviante perché può portare a dare per scontato qualche cosa che invece deve essere dimostrato.

Strutturalisti. In maniera ancora più radicale per la scuola strutturalista l'intuizione è cosa più da combattere che da utilizzare ed essa non ha assolutamente valore euristico. Ad esempio se ogni volta che si parla dei gruppi ci si immagina il gruppo additivo dei reali, allora si è portati ad attribuire ai gruppi più proprietà di quante siano deducibili dal dato sistema di assiomi (ad esempio la commutatività). In altri termini, poiché per gli strutturalisti una teoria deve descrivere una intera classe di strutture diverse tra loro, è forviante nelle dimostrazioni guardare troppo ad una particolare struttura.

Categoricità.

Euclide. In Euclide la categoricità è una questione che, in un certo senso, non si pone neppure. Infatti il suo sistema di assiomi aveva l'unico scopo di descrivere in modo adeguato il modello fornito dall'idea platonica di punto e di retta. Il punto di partenza è tale modello e

pertanto non poteva mai porsi il problema della non categoricità, semmai quello della adeguatezza del sistema di assiomi.

Hilbert. Hilbert invece si pone esplicitamente la questione, anzi la considera un requisito essenziale per il suo sistema in quanto la bontà del sistema di assiomi proposto consiste proprio nella capacità di individuare un unico modello, quello euclideo. Egli richiedeva la categoricità anche per il sistema di assiomi per i numeri interi, dei numeri reali ed altro.

Strutturalisti. Infine, come abbiamo già osservato, per gli strutturalisti la non categoricità rappresenta un requisito essenziale se si vuole utilizzare un sistema di assiomi per quante più strutture possibili. In ciò si manifesta la radicale diversità con il punto di vista fondazionale.

Consistenza.

Euclide. Anche il problema della consistenza non poteva essere problema riguardante Euclide. Infatti il sistema di postulati proposto era un elenco di proprietà di un modello preesistente di cui l'uomo ha diretta ed innata conoscenza. Ma se un sistema di assiomi viene costruito isolando alcune proprietà di un dato modello allora esso è necessariamente consistente. Se infatti fossero deducibili sia una formula α che una sua negata $\neg\alpha$, allora per il modello di partenza esisterebbe una proposizione che è sia vera che falsa, il che non può accadere.

Hilbert. Per Hilbert il problema della consistenza è essenziale, non esiste un mondo geometrico da descrivere, esiste solo un sistema di assiomi e niente assicura che tale sistema sia stato scelto male e che ci si accorga che esso permette di dimostrare sia che valga una cosa che valga il contrario. Facciamo un esempio, e supponiamo che Hilbert avesse messo tra gli assiomi della sua teoria anche l'assioma

$$\alpha = \text{"l'insieme dei punti nel piano è numerabile"}.$$

La teoria risultante T sarebbe apparsa degna di interesse e si sarebbero prodotti molti teoremi di tale teoria. Purtroppo, Hilbert ad un certo punto sarebbe giunto a dimostrare (cosa che fa nel suo libro) che T permette di introdurre un sistema di coordinate che utilizza il campo dei numeri reali. Ciò avrebbe comportato la validità di

$$\neg\alpha = \text{"l'insieme dei punti nel piano non è numerabile"}$$

È ovvio allora che la teoria T , non potendo ammettere modelli, sarebbe risultata priva di ogni interesse.

D'altra parte non si può provare la consistenza di un sistema di assiomi facendo ricorso ad un modello perché non si può utilizzare la cosa da fondare (il modello) per giustificare un sistema di assiomi (la teoria) che ha come scopo proprio quello di fare a meno del modello.

Strutturalisti. Molto meno importante è la questione della consistenza per gli strutturalisti. È vero che tale questione in linea di principio si pone, ma, di fatto, una teoria viene proposta solo allo scopo di unificare lo studio di una serie di modelli matematici preesistenti. Pertanto tale teoria sarà, come per Euclide, automaticamente consistente. Ad esempio, il problema della consistenza della teoria dei gruppi non si pone in quanto tale teoria nasce successivamente alla considerazione di alcuni gruppi concreti.

Il problema dei fondamenti.

Sia in Euclide che in Hilbert l'assiomatizzazione risponde al problema di dare un fondamento sicuro all'intero edificio della matematica. Negli strutturalisti l'atteggiamento è più pragmatico

e "locale". Essi non pretendono di dare una volta per tutti un sistema di assiomi su cui fondare tutto. Piuttosto essi pensano che la matematica si possa smembrare in diversi settori i quali si possono esaminare indipendentemente uno dall'altro. Ad esempio J. Dieudonné, uno dei fondatori dello strutturalismo in matematica, afferma

Il matematico moderno si sente così perfettamente in pace con la sua coscienza e non si preoccupa affatto di tutti gli pseudoproblemi che hanno preoccupato i suoi predecessori.

Gli pseudo-problemi di cui si parla sono i paradossi che non sembrano interessare più di tanto gli strutturalisti. Se anche una singola teoria risultasse essere contraddittoria, ciò non comporterebbe il crollo di tutto l'edificio matematico, ma semplicemente un piccolo cambio di indirizzo (un indebolimento di qualche assioma). Inoltre mentre la dimostrazione della coerenza dei sistemi di assiomi per l'aritmetica e la geometria presentano difficoltà insormontabili, lo stesso non avviene per molte "piccole" teorie esaminate dagli strutturalisti. La loro coerenza si può mostrare spesso semplicemente esibendo dei modelli finiti (come avviene per la teoria dei gruppi, dei campi, degli anelli ed altro). E poi le questioni relative ai fondamenti della matematica non devono infastidire i matematici di professione. Si provvederà ad addestrare appositamente del personale "paramatematico" (i logici) che se ne occupi.

Tutte le questioni come la non contraddizione delle teorie . . . ed in generale tutto ciò che concerne la teoria della dimostrazione fanno parte ora di una scienza completamente separata dalla matematica, la metamatematica; questa nuova disciplina non cessa di svilupparsi ed ha già fornito numerosi risultati nuovi e pieni di interesse; ma è perfettamente lecito al matematico ignorarla completamente senza essere per nulla preoccupato nelle sue ricerche (è sempre Dieudonné che parla).

10. Strutturalismo e divisione del lavoro

La matematica è sempre stata divisa in tanti settori quanti sono gli oggetti matematici da studiare. Così la geometria era la scienza dello spazio (che a sua volta si divideva in piana e solida), l'aritmetica la scienza dei numeri, l'analisi la scienza delle quantità infinitamente piccole e di quelle infinitamente grandi e così via. Con lo strutturalismo tale divisione della matematica viene messa in discussione. Ad esempio la geometria si smembra in vari settori completamente indipendenti tra loro. In buona parte viene sostituita dalla geometria analitica intesa come algebra lineare e teoria delle matrici. Lo studio delle coniche e delle quadriche diviene un caso particolarissimo di un altro settore, la geometria algebrica, una teoria completamente algebrizzata. Lo studio dei movimenti del piano rientra nella teoria dei gruppi. Lo studio delle aree e delle lunghezze nella teoria della integrazione. A sua volta l'aritmetica viene smembrata nello studio di diverse strutture algebriche, l'analisi matematica in parte si traduce nella teoria degli spazi topologici, in quella degli spazi metrici o normati. Per dirla in maniera più specifica, si perviene ad una nuova divisione della matematica basata sul fatto che tutte le strutture fino ad ora studiate sono riconducibili per la loro forma logica e non per il loro contenuto alle seguenti tre categorie:

- (a) strutture algebriche

- (b) strutture relazionali
- (c) strutture topologiche.

Le strutture algebriche sono quelle che fanno riferimento solo alle operazioni. Esempi sono la teoria dei gruppi, dei campi, degli spazi vettoriali. Le strutture relazionali sono quelle che fanno riferimento alle relazioni. Esempi sono dati dalla teoria degli insiemi ordinati e dalla teoria dei grafi. Infine le strutture topologiche sono quelle che fanno riferimento a particolari insiemi di parti chiamati topologie. In tali strutture è possibile esaminare i concetti di convergenza e continuità. Da tale punto di vista, in un certo senso, la geometria euclidea non trova una soddisfacente collocazione. È una struttura troppo "confusa" in cui sono presenti sia aspetti algebrici (il campo dei numeri reali per la coordinatizzazione, lo spazio vettoriale delle traslazioni, il gruppo dei movimenti del piano), sia aspetti relativi all'ordinamento ed alla relazione "essere tra" (ricordiamo che in ogni retta si definiscono in modo naturale due ordinamenti) sia la struttura topologica (l'usuale topologia generata dai rettangoli che viene studiata in analisi). D'altra parte il campo dei numeri reali che è alla base della geometria euclidea è una struttura algebrica con un ordinamento ed una struttura topologica.

Divisione del lavoro, specializzazione.

Il nuovo modo di organizzare la matematica degli strutturalisti ha permesso lo svilupparsi anche nell'ambito della matematica di alcuni fenomeni noti, per chi si interessa di sociologia o di politica, sotto il nome di divisione del lavoro, specializzazione e alienazione. È esperienza comune delle maggior parte degli studenti del corso di laurea in matematica il fatto che ogni materia di esami è completamente scollegata alle altre e, tranne il caso dell'analisi matematica che non risente molto dell'influenza strutturalista, anche con gli studi degli anni precedenti. È possibile seguire un corso di topologia senza conoscere niente di algebra e viceversa e si possono capire entrambi senza avere nessuna conoscenza matematica precedente. Si badi che non si tratta di mancanza di coordinamento e di organizzazione e neanche di volontà di andare incontro alle esigenze dello studente non richiedendo prerequisiti. È invece un modo di concepire la matematica come corpo di conoscenze che si può parcellizzare in unità autonome tra loro ed autonome dalle altre scienze. Questa parcellizzazione, consentendo una divisione del lavoro ed una estrema specializzazione, diventerebbe uno strumento formidabile per produrre una grande quantità di risultati scientifici. Ciò in contrapposizione con i risultati artigianali di una volta. Vediamo ad esempio cosa dicono Giorgio Israel e Lucio Lombardo Radice in Storia della Scienza (Ed. Universale Laterza, vol. II).

L'introduzione del metodo assiomatico realizza una trasformazione del lavoro matematico che, secondo i Bourbakisti, è paragonabile alla transizione dal lavoro di tipo artigianale ad un lavoro di "fabbrica". Il matematico non procede più, come l'artigiano, inventando di volta in volta metodi nuovi e stratagemmi per risolvere il problema specifico di fronte al quale si trova; al contrario, se egli incontra relazioni che soddisfano gli assiomi di una struttura già nota, può fare uso di tutto l'arsenale del tipo di struttura individuata.

E, più avanti, continuano

Come l'organizzazione del lavoro tayloristica significa da un lato controllo del singolo processo, dall'altro lato parcellizzazione ed alienazione da una finalità complessiva, così all'introduzione dei metodi standard legati al metodo assiomatico fa riscontro il carattere "anarchico" ed incontrollato dei rapporti tra matematica e scienza sperimentale, la rinuncia definitiva ad ogni spiegazione complessiva dei fenomeni naturali. Ma non soltanto a questo livello si riflette il taylorismo della concezione Bourbakisti, bensì anche all'interno della ricerca matematica, dove lo studio delle strutture prende il piede sullo studio dei problemi ed implica ancora una volta la perdita di consapevolezza del ricercatore in merito agli indirizzi complessivi della ricerca.

Nota. La distinzione tra approccio fondazionale ed approccio strutturalista al metodo assiomatico è di un certo interesse da un punto di vista didattico. Infatti il metodo assiomatico nelle scuole può essere introdotto o tramite un sistema di assiomi per la geometria euclidea (Hilbert) oppure tramite la nozione di gruppo o di insieme ordinato (Bourbakismo). Nel primo caso la scelta fondazionale presenta difficoltà se gli studenti non sono stati stimolati verso interessi epistemologici. Infatti per essi sembrerà strano che si debba perdere tanto tempo per dimostrare cose che appaiono ovvie. Inoltre l'esistenza di un unico modello renderà difficile far capire questioni di indipendenza. Infine il carattere estremamente intuitivo di tale modello farà scomparire in modo completo la questione dell'indipendenza. Nel secondo caso l'approccio unificante del metodo assiomatico in chiave strutturalista può essere compreso dagli alunni solo se prima sono stati esibiti molti esempi di strutture diverse che però sono suscettibili di una trattazione unificata. Ad esempio dovrebbero essere prima introdotti alcuni gruppi particolari come quello delle simmetrie di una figura, quello delle permutazioni di un insieme, quello dei movimenti del piano e così via.

Concludiamo questo paragrafo riportando l'opinione di John von Neumann (1903-1957), uno dei matematici più versatili del XX secolo, espressa nell'articolo *The Mathematician* (1947).

“Quando una disciplina matematica si allontana di molto dalla sua fonte empirica o, il che è ancor peggio, se per due o tre generazioni viene ispirata solo indirettamente dalla «realtà», essa corre pericoli estremamente gravi. Diventa sempre più un'attività puramente estetica, sempre più *l'art pour l'art*. Questo fatto non è necessariamente negativo, se il campo è attorniato da soggetti che mantengono stretti legami empirici, oppure se la teoria è dominata dall'influenza di uomini con uno spirito di altissimo livello. Ma esiste il grave pericolo che la disciplina si sviluppi lungo la linea che offre minor resistenza; è possibile che la corrente, così lontana dalla sua fonte, si separi in una moltitudine di diramazioni insignificanti e quella disciplina diventi una massa disorganizzata di dettagli e nozioni complesse. In altre parole, una disciplina matematica che si trovi a grande distanza dalla sua fonte empirica, o abbia generato per troppo tempo molte filiazioni sterili e astratte, corre il rischio di degenerare. Da principio lo stile è generalmente classico; quando mostra segni di diventare barocco, ecco il segnale di pericolo [...]. In ogni caso, una volta raggiunto questo stadio mi sembra che l'unico rimedio sia ringiovanire ritornando alla fonte: occorre introdurre

nuovamente idee derivate, in minore o maggior grado, dall'esperienza. Sono convinto che questa sia stata una condizione necessaria per conservare la freschezza e la vitalità della matematica, e che altrettanto valga per il futuro”.

APPENDICE

L'assioma della scelta ed un modello matematico del miracolo dei pani e dei pesci.

In questa appendice esporremo alcune interessanti e paradossali conseguenze dell'assioma della scelta che sono legate alla nozione di equiscomponibilità ed a quella di misura. Ricordiamo le principali nozioni in teoria della misura.

Definizione 1. Sia S un insieme non vuoto ed M una algebra di Boole di sottoinsiemi di S^2 . Allora, dato un ordinale λ diciamo che M è una λ -algebra di Boole se

- per ogni famiglia $(A_i)_{i \in I}$ di elementi in M tale che la cardinalità di I sia minore o uguale a λ risulta che $\cup_{i \in I} A_i \in M$.

Definizione 2. Una misura λ -additiva è una funzione $\mu : M \rightarrow R^+ \cup \{\infty\}$, dove M è una λ -algebra di Boole, tale che

$$i) \quad \mu(\emptyset) = 0,$$

$$ii) \quad \mu(\cup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} \mu(A_i) \quad \text{per ogni famiglia } (A_i)_{i \in I} \text{ di elementi di } M \text{ a due a due disgiunti con } I \text{ di cardinalità minore o uguale a } \lambda.$$

Se X è un elemento in cui μ è definita, cioè se $X \in M$, allora si dice che X è *misurabile*.

In particolare siamo interessati alle misure 2-additive che prendono anche il nome di *misure finitamente additive* ed alle misure ω -additive che si dicono anche *numerabilmente additive*. Naturalmente ogni misura numerabilmente additiva è anche una misura finitamente additiva.

Definizione 3. Una misura μ nello spazio euclideo viene detta *invariante rispetto alle isometrie*, se

$$\mu(X) = \mu(\tau(X))$$

per ogni isometria τ e per ogni insieme misurabile X .

In altri termini una misura è invariante se insiemi uguali hanno la stessa misura o, se si vuole, se la misura si conserva quando le figure vengono mosse nel piano. Usualmente le misure che si utilizzano negli spazi euclidei si basano tutte sul fatto che la misura di un rettangolo è data dalla base per l'altezza. Poiché ogni spostamento di un rettangolo non altera la sua base e la sua altezza è evidente che tale misure sono tutte invarianti rispetto alle isometrie. Se si pone μ costantemente uguale a zero si ottiene una misura λ -additiva invariante rispetto alle isometrie.

Un'altra misura invariante λ -additiva si ottiene ponendo $\mu(X) = \infty$ per ogni $X \neq \emptyset$. Chiamiamo *banali* queste due misure.

² Una algebra di Boole di sottoinsiemi di S è una classe M di sottoinsiemi di S tale che:

- $\emptyset \in M$ ed $S \in M$
- l'unione di due elementi di M appartiene ancora a M
- l'intersezione di due elementi di M appartiene ancora ad M
- il complemento di un elemento di M appartiene ancora ad M .

Proposizione 4. Nello spazio Euclideo le uniche misure 2^0 -additive invarianti per isometrie se non quelle banali.

Dim. Due punti P e Q del piano euclideo sono sempre “uguali” nel senso che esiste sempre una isometria che porta uno nell’altro (basta considerare una ovvia traslazione). Pertanto in una misura invariante tutti i punti hanno la stessa misura. D’altra parte ogni insieme X è l’unione dei suoi punti. Pertanto se si accettasse la 2^0 -additività sarebbe $\mu(X) = \sum_{x \in X} \mu(\{x\})$. Se le misure dei singoletti sono tutte uguali a zero allora avremmo che $\mu(X) = 0$. Se fossero uguali ad un numero diverso da zero avremmo che $\mu(X) = \infty$.

Proposizione 5. Consideriamo una misura finitamente additiva nello spazio euclideo che sia invariante rispetto alle isometrie. Allora due figure geometriche A e B equiscomponibili in pezzi che sono misurabili hanno la stessa misura.

Dim. Infatti, detti A_1, \dots, A_n i “pezzi” in cui è scomposto A e B_1, \dots, B_n i “pezzi” in cui è composto B , risulta che

$$\mu(A) = \mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n) = \mu(B_1) + \dots + \mu(B_n) = \mu(B).$$

Abbiamo già visto nel primo capitolo che un triangolo è equiscomponibile ad un rettangolo con uguale base e metà altezza. Ciò consente di provare che l’area di un triangolo è uguale alla base per l’altezza diviso due. Poi abbiamo visto che un parallelogramma è equiscomponibile ad un rettangolo con uguale base ed uguale altezza. Ciò prova che l’area del parallelogramma è uguale alla base per l’altezza. Ancora abbiamo visto che un poligono regolare è equiscomponibile ad un rettangolo che ha come base il perimetro ed altezza l’apotema. Anche in questo caso abbiamo una formula per il calcolo dell’area.

Teorema 6. (*Esempio di Vitali*). Se si accetta l’assioma della scelta allora un cubo nello spazio tridimensionale euclideo si può spezzare in una successione di sottoinsiemi disgiunti tutti equiscomponibili tra loro.

Dim. Cominciamo con il dimostrare che l’intervallo $[0,1)$ si può scomporre in una successione di insiemi $(C_k)_{k \in \mathbb{N}}$ equiscomponibili tra loro. Per fare questo, definiamo in $[0,1)$ la relazione \equiv ponendo $x \equiv y$ se $x-y$ è un numero razionale³. E’ facile verificare che \equiv è una relazione di equivalenza e che quindi ripartisce $[0,1)$ in classi di equivalenza. In base all’assioma della scelta possiamo prendere in ogni classe un elemento rappresentativo. Indichiamo con T l’insieme degli elementi ottenuti in questo modo. Allora ogni classe di equivalenza è costituita

³ Supponiamo di avere dimostrato che π sia irrazionale e poniamoci il problema di trovare altri esempi di numeri irrazionali. La cosa non è difficile poiché basta aggiungere a π un qualunque numero razionale q . Infatti se $c = \pi + q$ fosse uguale ad un razionale, allora $\pi = c - q$ sarebbe razionale. Naturalmente questi esempi non sono molto significativi. Se si considera la relazione \equiv , diremmo che tali esempi sono tutti equivalenti tra di loro e coincidono con gli elementi della classe di equivalenza $[\pi]$.

da un elemento r di T a cui sono aggiunti tutti i possibili razionali (purché si rimanga in $[0,1)$). In altre parole

$$[0,1) = \bigcup_{r \in T} [r] = \{r+q : r \in T, q \in \mathbb{Q}, r+q \in [0,1)\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (T+q) \cap [0,1)$$

dove gli insiemi $T+q$ sono tutti disgiunti tra loro. Infatti supponiamo che $(T+q) \cap (T+q') \neq \emptyset$ con $q \neq q'$ e supponiamo che z sia un elemento di tale intersezione. Allora esisterebbero $t, t' \in T$ tali che $z = t+q = t'+q'$ e quindi tali $t-t' = q'-q$. Ciò comporterebbe l'equivalenza tra t e t' e quindi che $t = t'$. Ciò è in contrasto con il fatto che $q \neq q'$.

Osserviamo anche che nella maggior parte dei casi gli insiemi $(T+q) \cap [0,1)$ sono vuoti, ad esempio nei casi in cui $q > 1$ oppure $q < -1$. Pertanto nell'unione $\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (T+q) \cap [0,1)$ è inutile considerare tutti i possibili razionali ma ci si può limitare a quelli dell'intervallo $[-1,1]$. Detta $(q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una enumerazione di tutti i razionali in $[0,1]$ è evidente che $(1-q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ è una numerazione di tutti i razionali in $[-1,0]$. Pertanto, se poniamo

$$A_k = (T+q_k) \cap [0,1)$$

$$B_k = (T+q_{k-1}) \cap [0,1)$$

$$C_k = A_k \cup B_k$$

possiamo scrivere

$$\begin{aligned} [0,1) &= (\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (T+q_k) \cap [0,1)) \cup (\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (T+q_{k-1}) \cap [0,1)) \\ &= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} ((T+q_k) \cap [0,1)) \cup (T+q_{k-1}) \cap [0,1)) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \cup B_k = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_k \end{aligned}$$

D'altra parte se trasliamo il pezzo $A_k' = \{x \in T : x < 1-q_k\}$ di T tramite la traslazione di ampiezza q_k otteniamo A_k . Se trasliamo il pezzo rimanente $B_k' = \{x \in T : x \geq 1-q_k\}$ tramite la traslazione di ampiezza q_{k-1} otteniamo A_k . Questo prova che ciascun insieme $C_k = A_k \cup B_k$ è equiscomponibile con $T = A_k' \cup B_k'$ e che quindi tutti questi insiemi sono equiscomponibili tra loro.

Possiamo ora procedere alla dimostrazione del teorema riferendoci al cubo $[0,1)^3$ ed osservando che

$$[0,1)^3 = [0,1) \times [0,1) \times [0,1) = (\bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_k) \times (\bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_k) \times (\bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_k) = \bigcup_{h,k,r \in \mathbb{N}} (C_h \times C_k \times C_r). \quad (2)$$

E' evidente allora che tutti gli insiemi $C_h \times C_k \times C_r$ sono equi-scomponibili a $T \times T \times T$ e quindi equi-scomponibili tra loro. In conclusione, la classe di tali insiemi costituisce la scomposizione cercata.

Una importante conseguenza del teorema di Vitali è relativa alla impossibilità di definire una misura numerabilmente additiva nello spazio euclideo che sia invariante e capace di misurare tutti gli insiemi.

Corollario 7. Se si accetta l'assioma della scelta è possibile provare che non esiste una misura numerabilmente additiva μ nello spazio euclideo R^3 tale che:

- μ sia invariante rispetto alle isometrie,
- μ sia definita in tutti i sottoinsiemi di R^3 .

Dim. Se per assurdo esistesse una misura invariante definita in tutti i sottoinsiemi di R , allora $\mu(S) = \mu(\bigcup_{k \in N} D_k) = \sum_{k \in N} \mu(D_k)$. Considerando il fatto che $\mu(D_k) = \mu(T)$ per ogni indice k , avremmo che se fosse $\mu(T) = 0$ allora $\mu(S) = 0$ e quindi tutti gli insiemi avrebbero misura nulla. Se invece fosse $\mu(T) > 0$ si avrebbe che $\mu(S) = \infty$.

Passiamo ora al paradosso di Banach-Tarski che può essere enunciato così:

“E’ possibile suddividere un cubo in un numero finito di parti e poi ricomporre tali parti per formare due cubi identici al primo”.

Una formulazione precisa del paradosso è la seguente.

Teorema 8. (Banach-Tarski). Assumiamo l’assioma della scelta, ed indichiamo con S un cubo unitario dello spazio euclideo a tre dimensioni. Allora S è equi-scomponibile a due copie di se stesso, cioè esistono due cubi unitari disgiunti S' e S'' tali che $S \sim S' \cup S''$.

Non proveremo tale sorprendente teorema ma ci limitiamo a mettere in evidenza che da esso consegue un altro interessante teorema sulle misure finitamente additive nello spazio euclideo.

Corollario 9. Non esiste una misura finitamente additiva (e quindi neanche numerabilmente additiva) nello spazio euclideo tridimensionale tale che

- sia invariante rispetto alle isometrie,
- sia definita su tutti i sottoinsiemi dello spazio.

Dim. Infatti se tale misura esistesse, il cubo unitario S avrebbe misura uguale a quella di $S' \cup S''$ e quindi misura uguale a due volte la propria misura.

Il teorema di Tarski-Banach urta fortemente contro la nostra intuizione. Infatti siamo portati a considerare i sottoinsiemi dello spazio euclideo come “corpi” e quindi il vedere che un corpo S possa essere spezzato in parti che ricomposte opportunamente formano due corpi uguali ad S sembra alquanto strano. Si potrebbe anche dire che tale teorema è in contrasto con il principio della conservazione della massa. Infatti durante il movimento le masse dei pezzi in cui è stato decomposto S dovrebbero conservarsi invece il teorema prova che si raddoppiano.

Un possibile atteggiamento nei confronti del paradosso di Tarski-Banach è quello di accettare come assioma l’esistenza di una misura invariante ed ovunque definita e quindi di reinterpretare il paradosso come una dimostrazione per assurdo che l’assioma della scelta non vale.

Bibliografia

- E. Paolini. *Il paradosso di Banach-Tarski.*
 A. Zanardi, *Note sugli insiemi.*