

## CAPITOLO 2

### CRISI DELLA GEOMETRIA EUCLIDEA ED ARITMETIZZAZIONE.

Per tutto il diciassettesimo ed il diciottesimo secolo la geometria rimase, nella guerra contro l'empirismo, una fortezza inespugnabile degli idealisti. Coloro i quali credevano (come in generale si credeva sul continente) che fosse possibile una conoscenza del mondo reale certa ed indipendente dall'esperienza non avevano che da indicare la geometria: soltanto un pazzo avrebbe messo in dubbio la sua validità, e soltanto uno sciocco ne avrebbe negato il riferimento oggettivo. (Bertrand Russell)

#### 1. Cartesio e la crisi dell'approccio sintetico: il calcolo dei segmenti

La geometria euclidea restò al centro della matematica fino agli inizi del 1800 quando, ad opera di matematici come Lobachevsky e Bolyai si svilupparono le geometrie non euclidee, cioè geometrie che negavano validità al quinto postulato. In realtà, prima ancora che con tali scoperte, un primo fondamentale elemento di crisi del metodo di Euclide (se non proprio della sistema geometrico di Euclide) si manifestò con il sistematico processo di algebrizzazione della geometria. Tale processo, iniziato ai primi del 1600, si svilupperà nella attuale geometria analitica e trasformerà la geometria "sintetica" di Euclide, in cui si dimostrano teoremi e si tracciano figure, in quella che attualmente si chiama geometria "analitica" in cui tutti i problemi si riducono alla ricerca di radici di sistemi di equazioni algebriche. In un certo senso si passa dalle "dimostrazioni con figure" tipiche della geometria euclidea ai "calcoli" tipici della geometria analitica. Si parlerà anche di *metodo sintetico* in opposizione al *metodo analitico*.

Come è noto, la geometria analitica si ottiene quando fissati due assi e su di essi due unità di misura, si siano identificati

- i punti del piano con le relative coordinate,
- le rette con le equazioni di primo grado,
- le coniche con quelle di secondo e, più in generale, le curve con opportune equazioni implicite o esplicite.

Allora ad ogni operazione geometrica corrisponde una operazione di carattere analitico (cioè relativa ai numeri reali). Ad esempio l'intersezione di due curve si traduce nella risoluzione di un sistema di due equazioni.

Concorsero a tale processo di algebrizzazione scienziati e filosofi come Fermat e Cartesio<sup>1</sup>. In particolare è interessante esaminare il libro di Cartesio *La Geometria* che è una delle appendici del famoso *Discorso sul Metodo* del 1637. La Geometria è costituita da tre parti, di cui la prima porta il titolo "*Dei problemi che si possono costruire col solo uso di cerchi e di linee rette*". Si deve tenere conto che il termine "costruzione" di un problema si deve intendere come "costruzione geometrica di un segmento che sia soluzione del problema" e quindi equivale a "risoluzione" di un problema. In questa prima parte si illustra come sia possibile elaborare un "calcolo geometrico" dei segmenti che è l'analogo geometrico della moderna teoria dei numeri reali.

*Come l'aritmetica è composta solo di quattro, cinque operazioni, la Somma, la Sottrazione, la Moltiplicazione, La Divisione e la Estrazione delle radici, che si può considerare una specie di Divisione, così anche in Geometria, per quanto riguarda le linee che si cercano . . .*

Il brano prosegue spiegando come si possano fare le corrispondenti operazioni con i segmenti. Per la somma e la sottrazione la cosa è evidente. Per quanto riguarda il prodotto e la divisione si utilizza la nozione di proporzione. Infatti supponiamo di volere moltiplicare i segmenti  $d$  e  $c$ . Allora basta trovare una costruzione geometrica per cui valga una proporzione del tipo  $1 : d = c : x$  in quanto, essendo il prodotto dei medi uguale al prodotto degli estremi, in tale caso il segmento  $x$  rappresenterà il prodotto di  $d$  per  $c$ . D'altra parte è ben noto come ottenere grandezze proporzionali in geometria. E' sufficiente considerare triangoli simili.

---

<sup>1</sup> Cartesio è quello del *cogito ergo sum* per chi ha ricordi di liceo.

**Definizione 1.** Il triangolo  $ABC$  si dice *simile* al triangolo  $A'B'C'$  se l'angolo in  $A$  è uguale all'angolo in  $A'$ , l'angolo in  $B$  è uguale all'angolo in  $B'$  e l'angolo in  $C$  è uguale all'angolo in  $C'$ .

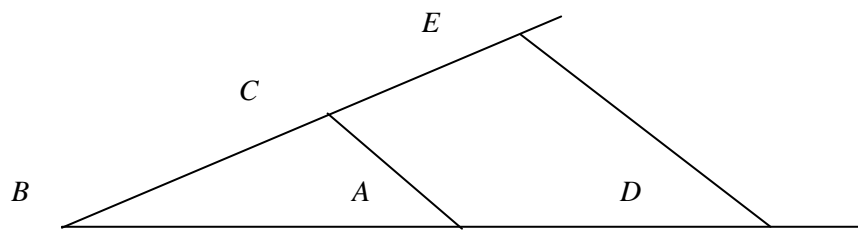
In altre parole due triangoli si dicono simili se hanno gli stessi angoli. Ovviamente la relazione di similitudine è una relazione di equivalenza, cioè è riflessiva, simmetrica e transitiva. Ricordando che nella geometria euclidea la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto, è possibile dimostrare la seguente proposizione.

**Proposizione 2.** Dati due triangoli è sufficiente che due degli angoli siano uguali perché si possa asserire che sono simili. Dati due triangoli rettangoli, è sufficiente che uno degli angoli sia uguale per asserire che sono simili.

**Proposizione 3.** Due triangoli simili hanno i lati proporzionali. Più precisamente, supponiamo che  $A, B, C$  siano i vertici di un triangolo e  $A', B', C'$  i vertici di un altro triangolo. In tale caso se l'angolo in  $A$  è uguale all'angolo in  $A'$ , l'angolo in  $B$  è uguale all'angolo in  $B'$ , e l'angolo in  $C$  è uguale all'angolo in  $C'$ , allora

$$AB : A'B' = AC : A'C' \text{ e } AC : A'C' = BC : B'C'.$$

Utilizzando questa notissima proposizione Cartesio dice, con riferimento alla seguente figura,



*... sia per esempio  $BA$  l'unità: se bisogna moltiplicare  $BD$  per  $BC$  devo soltanto aggiungere i punti  $A$  e  $C$ , poi tracciare  $DE$  parallela a  $CA$ , e  $BE$  è il risultato di questa moltiplicazione.*

In altre parole si considerino due rette distinte per il punto  $B$  e due punti  $D$  e  $C$  su tali rette in modo che  $BD$  sia uguale a  $d$  e  $BC$  sia uguale a  $c$ . Sia inoltre  $A$  un punto della retta per  $B$  e  $D$  tale che  $BA$  sia unitario. Si tracci infine la parallela a  $AC$  per  $D$  e si denoti con  $E$  il punto di intersezione con la retta per  $B$  e  $C$ . Allora per la similitudine dei triangoli  $CBA$  e  $EBD$  risulterà che  $1 : BD = BC : BE$ . In conclusione  $BE$  è il prodotto cercato.

**Esercizio.** Calcolare il prodotto di 3 per 5 in modo grafico.

La stessa costruzione, quando si siano dati  $BE$  ed  $BD$ , vale per la divisione.

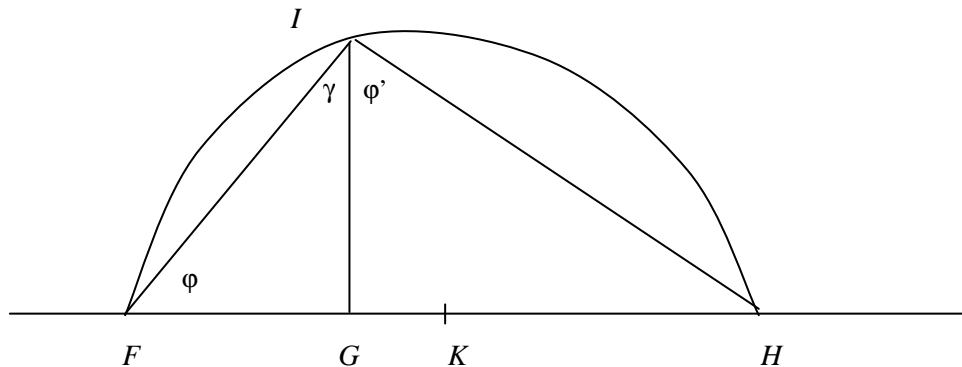
*... Se invece bisogna dividere  $BE$  per  $BD$ , avendo unito i punti  $E$  e  $D$ , traccio  $AC$  parallela a  $DE$  e  $BC$  è il prodotto di questa divisione.*

Precisamente, supponiamo che si voglia dividere il segmento  $d$  per il segmento  $c$ , allora basta fissare un punto  $E$  in modo che  $BE$  sia uguale a  $d$  ed un punto  $D$  in modo che  $BD$  sia uguale a  $c$ . Tracciata allora la retta per  $A$  parallela ad  $ED$ , chiamo con  $C$  il punto di intersezione con la retta per  $B$  ed  $E$ . Il segmento  $BC$  è il risultato della divisione come si ricava dalla proporzione  $1 : BD = BC : BE$ .

**Esercizio.** Calcolare  $6/3$  in modo grafico.

Anche nel caso di estrazione di radice quadrata abbiamo che tale problema si traduce nella individuazione di una opportuna proporzione.

... Se bisogna estrarre la radice quadrata di  $GH$ , aggiungo in linea retta  $FG$ , che è l'unità, e dividendo  $FH$  in due parti uguali nel punto  $K$ , dal centro  $K$  traccio (la semicirconferenza)  $FIH$ , poi innalzando dal punto  $G$  una linea retta fino ad  $I$  ad angoli retti su  $FH$ ,  $GI$  è la radice cercata.



Da notare che per un teorema della geometria euclidea l'angolo in  $I$  è retto<sup>2</sup>. Il fatto che  $IG$  sia il segmento cercato è giustificato dal seguente teorema.

**Teorema 4.** La misura del segmento  $GI$  è la radice quadrata della misura del segmento  $GH$ .

*Dim.* Per uno dei teoremi di Euclide l'altezza di un triangolo rettangolo è media proporzionale delle proiezioni dei cateti. Pertanto vale la seguente proporzione

$$FG : GI = GI : GH.$$

Poiché il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi, abbiamo che

$$FG \cdot GH = GI^2$$

e quindi, essendo  $FG = 1$ ,  $HG = GI^2$ . Se si vuole poi dimostrare il teorema di Euclide, cioè la proporzione, bisogna mostrare che opportuni triangolo sono simili. Esattamente dobbiamo mostrare che sono simili i due triangoli  $FGI$  e  $IGH$ . Ora per mostrare che due triangoli rettangoli sono simili è sufficiente provare che hanno un angolo uguale. Ma ciò non è difficile perché essendo la somma degli angoli di un triangolo un angolo piatto,  $\varphi = 180 - 90 - \gamma = 90 - \gamma$  ed essendo il triangolo retto in  $I$ , risulta che  $\varphi' = 90 - \gamma$ . Pertanto  $\varphi = \varphi'$ .

Ad esempio se voglio trovare graficamente la radice 9 allora applico la seguente procedura:

1. Traccio un segmento  $GH$  di lunghezza 9
2. Prolungo a sinistra tale segmento con un segmento  $FG$  di lunghezza 1
3. Trovo il punto medio  $K$  del segmento  $FH$
4. Traccio la circonferenza di centro  $K$  e diametro  $FH = 10$
5. Alzo la perpendicolare dal punto  $G$

Il segmento  $GI$  misurerà esattamente 3, cioè la radice di 9.

**Esercizio.** Trovare la radice di 7 in maniera grafica utilizzando cioè un righello ed un compasso.

## 2. Il Discorso sul Metodo e la geometria di Cartesio.

Il calcolo dei segmenti era alla base del metodo proposto da Cartesio e che poi nel seguito si svilupperà nella moderna geometria analitica. Tuttavia si deve sottolineare che quello che Cartesio proponeva era una riduzione della geometria ai suoi elementi più semplici, i segmenti, e non una riduzione della geometria a manipolazione di numeri come avviene attualmente<sup>3</sup>.

<sup>2</sup> Il teorema dice che l'angolo al vertice è la metà dell'angolo al centro. Ne segue che il nostro angolo è la metà di un angolo piatto.

<sup>3</sup> Si deve tenere conto del fatto che nel 1600 non erano ancora stati inventati gli attuali metodi di definizione dei numeri reali a partire dai razionali (e quindi dagli interi). Tali metodi si svilupperanno in maniera completa solo alla fine del 1800.

*Tutti i problemi della geometria si possono facilmente ridurre a tali termini che in seguito per costruirli basta conoscere la lunghezza di alcune rette.*

Come abbiamo visto tali elementi semplici si possono manipolare con operazioni simili a quelle dell'aritmetica. Pertanto è corretto dire che con Cartesio si ha una algebrizzazione della geometria purché con tale espressione non si intenda riduzione alla teoria dei numeri reali ma, in accordo con il punto di vista più moderno, come introduzione di un punto di vista algoritmico-manipolatorio che pone la nozione di operazione alla base di tutto.

D'altra parte in Cartesio non vi era solo l'esigenza di ridurre la geometria a calcolo (di segmenti). Altrettanto importante era il processo inverso che consiste nella possibilità di interpretare ogni discorso algebrico in termini geometrici. In altre parole egli pensava si dovesse da un lato

- liberare la geometria dal ricorso obbligato alle figure che affaticavano inutilmente l'immaginazione da un altro lato

- dare significato alle operazioni dell'algebra per mezzo di una interpretazione geometrica.

*Quanto poi all'analisi degli antichi e all'algebra dei moderni . . . , la prima è sempre siffattamente legata alla considerazione delle figure, che essa non può esercitare l'intelligenza senza affaticare di molto l'immaginazione; e, nella seconda, ci si è talmente assoggettati a certe regole e a certe cifre, che se ne è fatta un'arte confusa ed oscura, la quale tiene imbarazzato lo spirito, invece di (essere) una scienza che lo coltivi.*

Scopo dichiarato di Cartesio è la ricerca di un metodo generale in contrasto con il modo frammentario con cui procedevano i greci antichi quando si trattava di trovare una dimostrazione o di risolvere un problema. Se infatti è certamente un merito dei greci il fatto che ogni dimostrazione sia rigorosamente controllabile nei suoi singoli passaggi, niente viene detto da essi circa il metodo che si dovrebbe seguire per poter trovare nuovi teoremi e dimostrazioni. Pertanto restiamo disarmati di fronte ad ogni problema nuovo che si presenta e dobbiamo ogni volta procedere per tentativi.

Il metodo proposto da Cartesio per la geometria consisteva

- nell'indicare con lettere i dati e le incognite di un problema geometrico
- di tradurre le informazioni disponibili in equazioni
- nel semplificare, tramite calcoli algebrici, le equazioni quanto più possibile
- nel risolvere le equazioni risultanti da tale semplificazione in termini geometrici.

Pertanto abbiamo un passaggio del tipo Geometria → Algebra → Geometria piuttosto che un annullamento della geometria. Ad esempio dopo aver tradotto un problema geometrico in una equazione di secondo grado era opportuno semplificare al massimo tale equazione. Giunti però alla forma più semplice possibile la risoluzione della equazione finale doveva essere di tipo grafico. Pertanto la risoluzione grafica (detta costruzione) di semplici equazioni di secondo grado, in particolare il calcolo grafico di una radice quadrata, era un elemento essenziale della teoria di Cartesio. Ecco che cosa dice Cartesio nella sua *Geometria*

*Così, volendo risolvere qualsiasi problema, si deve innanzi tutto considerarlo come risolto, e si devono dare di nomi a tutte le linee che sembrano necessarie per la sua costruzione, sia quelle ignote, sia alle altre. Poi, senza fare alcuna differenza tra queste linee, note ed ignote, bisogna affrontare le difficoltà secondo l'ordine che mostra nella maniera più naturale in che modo tali linee siano in rapporto tra loro, fino a che non si sia trovato modo di esprimere una medesima quantità in due maniere diverse: ciò si chiama un'equazione (in una sola incognita) poiché i termini di una di queste due espressioni sono uguali a quelli dell'altra.*

Si noti che Cartesio tratta prevalentemente problemi che si traducono in una equazione ad una sola incognita e che l'idea di luogo geometrico, insieme dei punti le cui coordinate verificano una equazione a due variabili, non è presente nella sua opera se non in modo saltuario.

Concludiamo questo paragrafo sottolineando che le teorie matematiche di Cartesio erano strettamente legate al suo sistema filosofico più generale. Basti pensare che il suo libro *La Geometria* non venne pubblicato come un trattato a sé stante ma come una delle tre appendici del "*Discorso sul metodo*" il cui titolo completo è "*Discorso sul metodo per ben condurre la propria ragione e cercare la verità*"

nelle scienze" e che tali appendici avevano appunto il ruolo di illustrare il suo metodo filosofico generale. I precetti fondamentali di tale metodo erano:

- Il precetto dell'evidenza;
- Il precetto dell'analisi;
- Il precetto della sintesi;
- Il precetto del computo completo.

*Ed il primo era, di non accettare cosa alcuna per vera quando non la riconoscessi evidentemente per tale: cioè, di evitare studiatamente la precipitazione e la prevenzione; e di non accogliere nei miei giudizi nulla di più di ciò che si presentasse sì chiaramente e sì distintamente al mio spirito da non poter aver motivo alcuno di metterlo in dubbio.*

*Il secondo, di dividere ogni difficoltà, ch'io esaminassi, in parti elementari fino al limite del possibile e quanto sarebbe richiesto per trovarne la migliore soluzione.*

*Il terzo, di condurre per ordine i miei pensieri, cominciando dagli oggetti più semplici e più facili da conoscer, per salire a poco a poco e come per gradi alla conoscenza dei più complessi*

...

*E l'ultimo, di fare, in ogni argomento, enumerazioni così complete e verifiche così generali da essere sicuro di nulla omettere.*

### 3. La "costruzione" delle soluzioni di una equazione

Per illustrare il fatto che l'approccio cartesiano non è volto alla sola "traduzione" di ogni problema geometrico in problema algebrico, esaminiamo come ai tempi di Cartesio venivano affrontate a volte le equazioni di quarto grado.

Consideriamo ad esempio l'equazione

$$x^4 - x^3 - 3x^2 - 4 = 0. \quad (3.1)$$

Allora possiamo tentare di abbassare il grado di questa equazione ponendo  $y = x^2$  e poi sostituendo. In tale modo si ottiene il sistema di due equazioni di secondo grado

$$y^2 - xy - 3y - 4 = 0 \quad ; \quad y = x^2.$$

di cui (3.1) è la risultante. Poiché ciascuna equazione può essere vista come l'equazione di una conica, ciò significa che:

è possibile "costruire" le soluzioni di una equazione di quarto grado intersecando due opportune coniche.

Più precisamente dobbiamo disegnare le due coniche, intersecarle e poi andare a vedere le ascisse dei punti di intersezione. È il processo inverso a quello a cui siamo abituati: quello per cui, dovendo trovare i punti di intersezione di due coniche, scriviamo il sistema delle relative equazioni, troviamo l'equazione risultante e poi risolviamo tale equazione con qualche formula. Poiché la risoluzione di una equazione di quarto grado è un problema complicato, lo si traduce nel più semplice problema (grafico) di intersecare due coniche. In questo modo si capisce anche perché, in generale, una equazione di quarto grado ha quattro soluzioni.

Naturalmente se invece della semplice sostituzione  $y = x^2$  si utilizza qualche parametro, allora è possibile ottenere due coniche più "maneggevoli". Ad esempio se si pone

$$y = x^2 + \lambda x + \mu$$

allora elevando al quadrato entrambi i membri dell'equazione si ottiene

$$y^2 = x^4 + \lambda^2 x^2 + \mu^2 + 2\lambda x^3 + 2\mu x^2 + 2\lambda\mu x = x^4 + 2\lambda x^3 + (2\mu + \lambda^2)x^2 + 2\lambda\mu x + \mu^2.$$

$$\text{Da tale equazione si ricava che } x^4 = y^2 - \lambda^2 x^2 - \mu^2 - 2\lambda x^3 - 2\mu x^2 - 2\lambda\mu x$$

sostituendo in (\*) si ottiene

$$y^2 - 2\lambda x^3 - (2\mu + \lambda^2 - 3)x^2 - 2\mu x - \mu^2 - x^3 - 4 = 0.$$

In definitiva le radici che ci interessano si ottengono intersecando tale conica con la parabola  $y = x^2 + \lambda x + \mu$ . Scegliendo opportunamente il parametro  $\lambda$  eliminiamo  $x^3$ , infatti ponendo  $\lambda = -1/2$  si ottiene

$$y^2 - (2\mu - 11/4)x^2 + \mu x - \mu^2 - 4 = 0.$$

Possiamo ora scegliere il parametro  $\mu$  in modo opportuno. Ad esempio se poniamo  $2\mu - 11/4 = 0$ , cioè  $\mu = 11/8$  tale equazione diventa l'equazione di una parabola. Se poniamo  $2\mu - 11/4 = -1$ , tale equazione diventa quella di un cerchio. In definitiva possiamo ottenere le radici dell'equazione (3.1) sia intersecando due parabole, sia intersecando una parabola con un cerchio.

Nel caso di equazione di terzo grado le cose sono ancora più semplici. Ad esempio consideriamo l'equazione

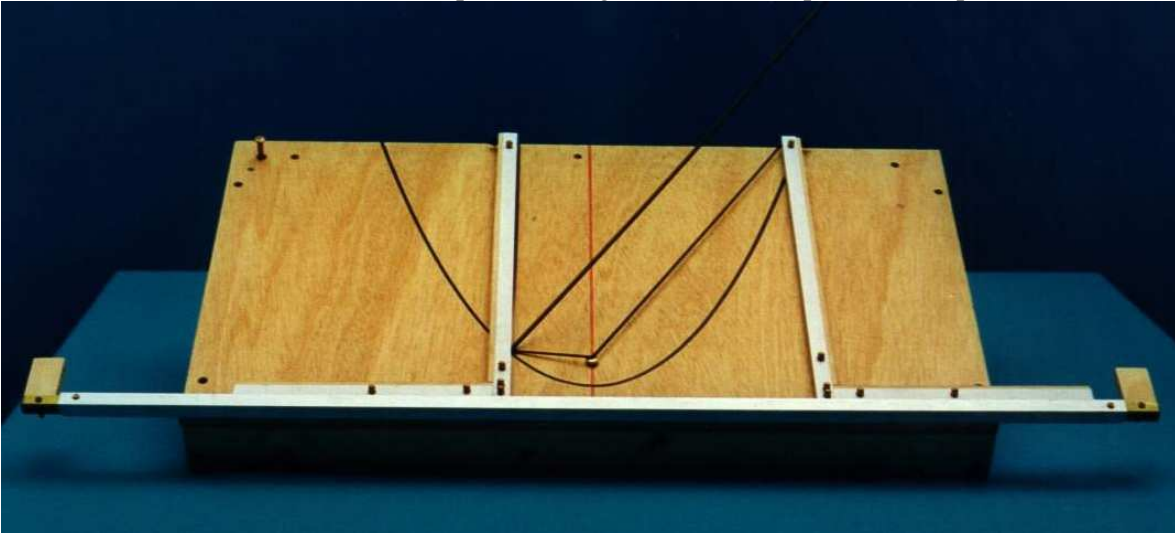
$$x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0.$$

Ponendo  $y = x^2$  si ottiene che tale equazione è la risultante delle equazioni

$$xy - 2y + x - 1 = 0 \quad ; \quad y = x^2,$$

che rappresentano una iperbole ed una parabola.

Da notare che il disegno delle coniche veniva fatto con "macchine" che tracciavano le curve in modo meccanico allo stesso modo come un compasso traccia un cerchio. Ad esempio in un bel sito sulle "macchine matematiche" viene riportata la seguente macchina per tracciare parabole<sup>4</sup>:

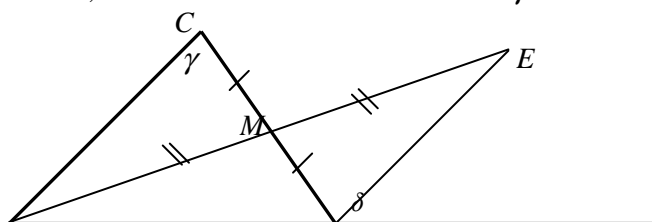


#### 4. Il quinto postulato e le geometrie non euclidee

Abbiamo visto che un primo elemento di crisi della concezione euclidea della geometria può essere visto nella massiccia introduzione della dimensione "calcolo" nella geometria che in tale modo diventava sempre meno "arte di inventare dimostrazioni" e sempre più un "calcolo delle grandezze continue". Ma il colpo definitivo alla centralità della geometria euclidea nel pensiero occidentale si ebbe con la scoperta della possibilità logica delle geometrie non euclidee, cioè di geometrie che negano validità al quinto postulato. Prima di parlare delle geometrie non euclidee, esaminiamo prima più da vicino il significato del quinto postulato. Per prima cosa mostriamo che dagli assiomi di Euclide escluso il quinto è possibile comunque derivare che data una retta  $r$  ed un punto  $P$  fuori da essa esiste almeno una retta parallela ad  $r$  passante per  $P$ . Il quinto postulato serve invece per dimostrare che tale retta è unica. Pur non volendo esporre le dimostrazioni complete, vediamo i passi fondamentali per provare l'esistenza della parallela e cominciamo con il teorema dell'angolo esterno.

**Proposizione 4.1.** Un angolo esterno di un triangolo è sempre strettamente maggiore dei due angoli interni non adiacenti.

*Dim.* Consideriamo il triangolo  $ABC$  e proviamo ad esempio che l'angolo esterno  $\delta = CBD$  è maggiore dell'angolo  $\gamma = ACB$ . A tale scopo sia  $M$  il punto medio del segmento  $BC$  e prolunghiamo il segmento  $AM$  in un segmento  $AE$  in modo che  $AM$  sia uguale a  $ME$ , allora i due triangoli  $ACM$  e  $EBM$  sono uguali avendo un angolo e due lati uguali. In particolare  $\gamma$  sarà uguale all'angolo  $MBE$ . D'altra parte tale angolo, essendo una parte di  $\delta$ , risulta minore di  $\delta$ . In conclusione  $\gamma$  è minore di  $\delta$ .



<sup>4</sup> Si veda all'indirizzo [http://www.museo.unimo.it/theatrum/macchine/\\_00lab.htm](http://www.museo.unimo.it/theatrum/macchine/_00lab.htm).

A

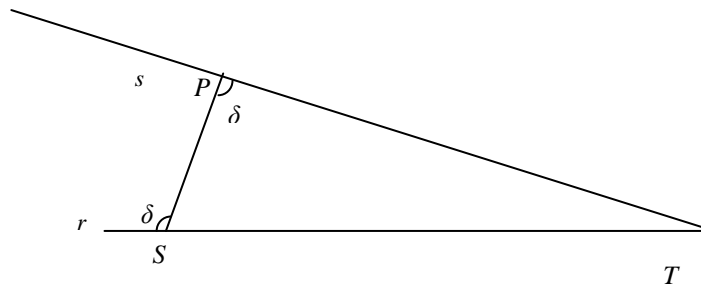
B

D

Naturalmente la dimostrazione che abbiamo dato diventa rigorosa solo se prima si è provato che tutte le costruzioni fatte sono rese possibili dai postulati di Euclide (escluso il quinto). Ad esempio deve essere prima provato che esiste il punto medio di un segmento, che due angoli opposti al vertice sono uguali e che valgono i criteri di uguaglianza dei triangoli. Ancora, ricordiamo che se si accetta il quinto postulato allora esiste una dimostrazione più semplice che permette di provare che l'angolo esterno è uguale alla somma degli angoli interni non adiacenti. Tale dimostrazione consiste nel tracciare per  $B$  una parallela ad  $AC$  e nell'applicare il teorema relativo agli angoli determinati da due rette parallele tagliate da una trasversale.

**Proposizione 4.2** Data una retta  $r$  ed un punto  $P$  non appartenente ad  $r$  esiste almeno una retta per  $P$  parallela ad  $r$ .

*Dim.* Sia  $S$  un punto qualsiasi della retta  $r$ , tracciamo la retta per  $S$  e per  $P$  ed indichiamo con  $\delta$  uno degli angoli tra  $r$  ed il segmento  $SP$ . Tracciamo poi una retta  $s$  per  $P$  che formi con  $SP$  l'angolo  $\delta$ , tali che  $S$  sia tra  $R$  e  $T$  e si consideri la retta per  $P$  ed  $S$ . Allora se per assurdo le rette  $r$  ed  $s$  si incontrassero in un punto  $T$  nel triangolo  $SPT$  avremmo l'angolo esterno in  $S$  uguale all'angolo interno non adiacente in  $P$ , in contrasto con quanto dimostrato nella proposizione precedente. Quindi la retta  $s$  non incontra  $r$ .



I matematici greci erano convinti della verità del quinto postulato e questo convincimento era comune a tutti i matematici fino alla prima metà del 1800. Si era inoltre convinti che tale postulato fosse in realtà dimostrabile utilizzando gli altri assiomi della geometria euclidea ed in tale senso furono fatti numerosi tentativi di dimostrazione. Nella prima metà del 1800 accade un fatto nuovo. Tre differenti matematici svilupparono un nuovo tipo di geometria. Si trattava del tedesco Gauss, dell'ungherese Bolyai e del russo Lobachevsky che fecero la loro scoperta uno indipendentemente dall'altro. Punto di partenza di tali autori è un diverso punto di vista filosofico nei riguardi della geometria che viene considerata un ramo della fisica piuttosto che un prodotto a priori del nostro spirito; ciò comportava che la validità degli assiomi della geometria dovesse essere convalidata o confutata dall'esperienza. Ad esempio ecco cosa scrive Gauss.

*Secondo la mia più profonda convinzione, la teoria dello spazio ha nei confronti del nostro sapere una posizione completamente diversa da quella della pura teoria delle grandezze (aritmetica); infatti, viene assolutamente a mancare alla nostra conoscenza della prima quella completa convinzione della sua necessità (e quindi anche della sua assoluta verità), che invece inerisce alla seconda; dobbiamo umilmente ammettere che, mentre il numero è puramente un prodotto del nostro spirito, lo spazio possiede una realtà anche al di fuori del nostro spirito, alla quale noi non possiamo prescrivere le sue leggi completamente a priori.* (Lettera di Gauss a Bessel del 9 aprile 1830)

Naturalmente il considerare la geometria alla stessa stregua della fisica comportava una interpretazione delle nozioni geometriche in termini di oggetti esistenti nel mondo reale. Ad esempio il segmento congiungente due punti  $P$  e  $Q$  poteva essere assimilato al percorso di minima distanza tra  $P$  e  $Q$ , oppure alla linea percorsa da un raggio di luce che partito da  $P$  raggiunge  $Q$ . Ciò permetteva ad esempio di immaginare esperimenti capaci di stabilire se un dato triangolo avesse o meno come somma di angoli interni un angolo piatto.

A questo nuovo punto di vista nei confronti della la geometria corrispondeva poi anche un atteggiamento diverso nei confronti del quinto postulato. Infatti se per i matematici greci il volere dimostrare tale postulato era solo una questione di eleganza e semplicità e nessuno ne metteva in dubbio la validità, nei matematici dell'ottocento si dubitava anche se esso fosse verificato nello spazio reale. Ecco ancora quello che dice Lobacevskij nell'introduzione alla sua "Nuovi principi della geometria" del 1835.

*A tutti è noto che, fino ad oggi, nella geometria la teoria delle parallele era rimasta incompiuta. I vani sforzi (compiuti) dai tempi di Euclide, per il corso di duemila anni, mi spinsero a sospettare che nei concetti stessi (della geometria) non si racchiuda ancora quella verità che si voleva dimostrare, e che può essere controllata, in modo simile alle altre leggi fisiche, soltanto dall'esperienze quali, ad esempio, le osservazioni astronomiche.*

Ma nel caso che il postulato delle parallele fosse falso nello spazio reale, allora esso non poteva essere certo provato a partire dai rimanenti postulati (certamente veri). Infatti da cose vere è possibile dedurre solo cose vere. Lo strumento per provare in maniera inconfutabile che il quinto postulato non è derivabile dai rimanenti è quello di mostrare "modelli" matematici che verificavano tutti gli assiomi tranne il quinto. Tali modelli furono chiamati *modelli non euclidei della geometria*.

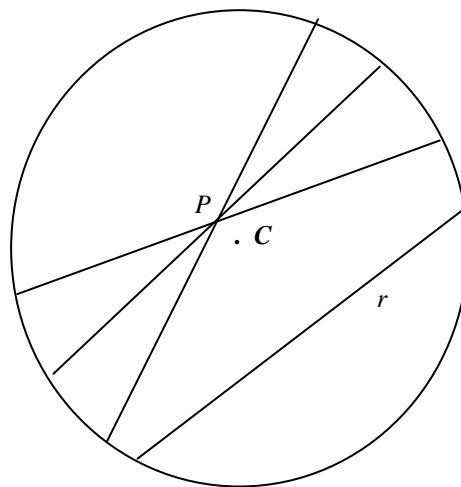
### 5. Modelli di geometrie non euclidee

Esponiamo, per dare una idea, due modelli non euclidei, quello di Klein e quello di Poincaré.

**Il modello di Klein.** In tale modello

- i punti sono i punti interni ad un dato cerchio  $S$  di centro  $C$ ,
- le rette sono le corde del cerchio (esclusi gli estremi).

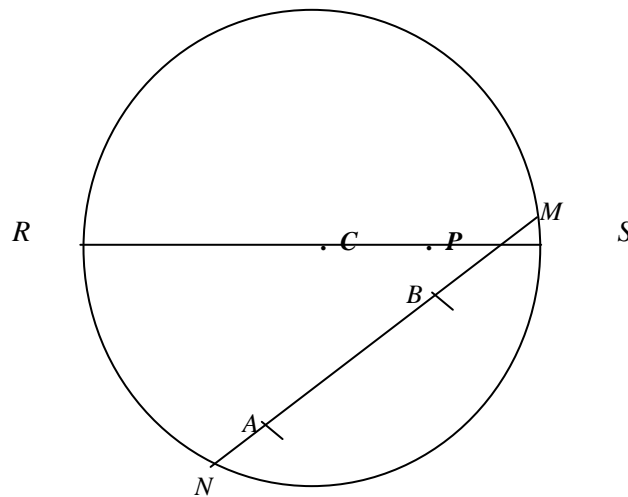
Come è illustrato nella figura, per un punto  $P$  fuori di una retta  $r$  passano infinite rette parallele ad  $r$ :



Pertanto non vale l'assioma delle parallele. È immediato provare che tutti gli altri assiomi di Euclide sono verificati. Ad esempio, provare che per due punti passa una ed una sola retta. Inoltre la nozione di distanza di due punti  $A$  e  $B$  (che serve per dare la nozione di eguaglianza tra segmenti) si definisce ponendo

$$d(A,B) = \log\left(\frac{MB \cdot NA}{MA \cdot NB}\right)$$

dove  $M$  ed  $N$  sono i punti di intersezione della retta  $AB$  con la circonferenza.



Supponiamo ad esempio che la circonferenza abbia equazione  $x^2+y^2=1$ , e calcoliamoci la distanza di un punto  $P$  dal centro  $C$ .

$$d(C,P) = \log\left(\frac{PS \cdot 1}{1 \cdot RP}\right) = \log\left(\frac{1-x}{1+x}\right).$$

Questa formula è interessante perché mostra che:

la distanza  $d(C,P)$  tende a diventare infinita quando  $x$  tende ad 1, cioè quando  $P$  si avvicina al bordo del cerchio.

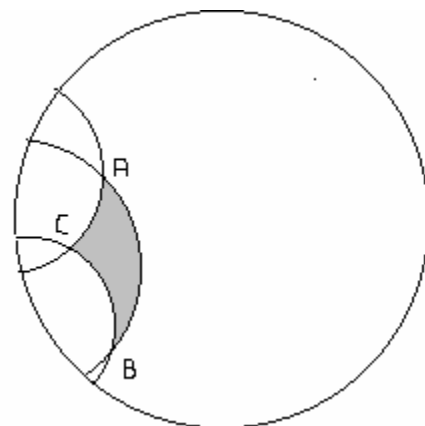
Ciò significa che un segmento unitario che venga spostato verso il bordo deve subire una contrazione che è tanto più forte quanto più ci si allontani dal centro. Equivalentemente possiamo dire che se, partendo dal centro del cerchio, cominciamo ad allontanarci a passi regolari, tali passi divengono sempre più piccoli senza che noi ce ne accorgiamo. Pertanto per ad un essere vivente all'interno del cerchio non risulta possibile uscire dal cerchio che gli apparirà, a tutti gli effetti, un universo non limitato. Ciò in contrasto con quanto appare ad un osservatore "esterno" per il quale il modello di Klein sembra occupare una parte limitata dello spazio. Possiamo immaginare una tale situazione supponendo che i punti perimetrali del cerchio esercitino una forza di repulsione verso i punti interni e che tale forza risulti tanto più forte quanto più ci si avvicina a tali bordi.

Si osservi che la nozione di uguaglianza di angoli viene definita in modo analogo a quanto fatto per l'uguaglianza di segmenti e che tale nozione non coincide con quella usuale del piano euclideo. Inoltre, nonostante le apparenze, un triangolo di tale geometria ha somma degli angoli interni minore di un angolo piatto.

**Modello di Poincaré.** Consideriamo ancora come insieme di punti l'insieme dei punti interni ad una circonferenza  $S$ ; ma cambiamo la nozione di retta.

Infatti chiamiamo rette tutte le circonferenze perpendicolari a  $S$ ; e tutti i diametri. La nozione di lunghezza di un segmento si definisce in maniera non troppo diversa da quella del modello di Klein mentre la nozione di uguaglianza di angoli è quella usuale del piano euclideo. Ciò è interessante in quanto, come si

vede nel triangolo  $ABC$  nella seguente figura, permette di comprendere perché la somma degli angoli interni di un triangolo è minore di un angolo retto.



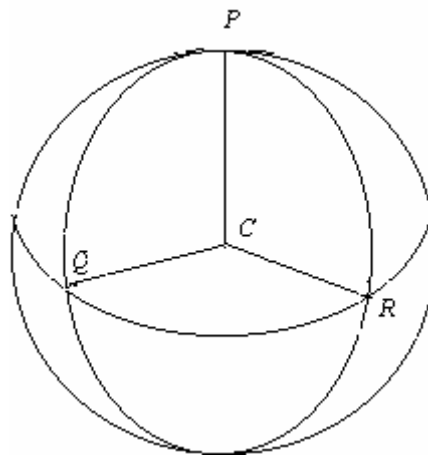
Sia il modello di Kline che quello di Poincaré permettono di derivare il seguente teorema:

**Teorema 1.** Il quinto postulato è logicamente indipendente dai rimanenti assiomi.

*Dim.* Indichiamo con  $T$  la teoria costituita da tutti gli assiomi proposti da Euclide escluso il quinto postulato. Allora se tale postulato fosse dimostrabile a partire da  $T$  sarebbe vero in tutti i modelli di  $T$ . Ma questo è impossibile poiché abbiamo trovato dei modelli di  $T$  che non verificano tale postulato<sup>5</sup>.

### Altre geometrie.

Successivamente il matematico Riemann ed il fisico Helmholtz, uno indipendentemente dall'altro, svilupparono delle geometrie in cui la somma degli angoli interni di un triangolo è strettamente maggiore di un angolo piatto. In esse non veniva negato solo il quinto postulato ma anche che un segmento possa essere prolungato a piacere. Per avere una idea di tali tipi di geometrie si osservi che nel piano euclideo i segmenti possono essere definiti come le linee di minima lunghezza congiungenti due punti assegnati. Ciò consente di vedere le linee rette come lo strumento per potersi muovere con minore fatica possibile su di una superficie piana.



Si supponga invece che ci si muova lungo la superficie di una sfera, ad esempio la superficie terrestre, allora appare ancora naturale chiamare "segmento" la linea più breve sopra tale superficie che congiunga due punti dati. È questo, ad esempio, il punto di vista di un capitano di una nave che si muova sulla superficie terrestre. Ora, se tale sfera ha centro  $C$ , si dimostra che tra le linee congiungenti due punti  $P$  e  $Q$  la più corta è quella che si ottiene intersecando la superficie della sfera con il cerchio di centro  $C$  e passante per  $P$  e  $Q$ . Naturalmente dei due archi per  $P$  e  $Q$  si deve scegliere il più corto è ciò crea un piccolo problema quando i due punti  $P$  e  $Q$  sono diametralmente opposti. Allora è opportuno considerare solo una parte della superficie sferica in modo che non vi siano punti diametralmente opposti. È immediato rendersi conto che il quinto postulato non vale per tale geometria. Si consideri ad esempio la figura dove i tre punti  $P$ ,  $Q$  ed  $R$  sono tali che i piani  $PCQ$  e  $PCR$  si intersecano in una retta

$PC$  ortogonale al piano  $CQR$ . Allora nel triangolo  $PQR$  gli angoli in  $Q$  ed  $R$  sono retti e ciò è in contrasto con il quinto postulato di Euclide. È facile vedere che in tutti i triangoli la somma degli angoli di tale triangolo è comunque maggiore di un angolo piatto.

Naturalmente se si considerano superfici differenti dalla superficie sferica e si definiscono i segmenti come le linee di minima distanza (dette geodetiche), allora si ottengono altri tipi di geometrie. Pertanto esistono tanti tipi di geometrie a due dimensioni quanti sono i tipi di superficie dello spazio. Inoltre, da un punto di vista matematico, non è difficile slittare di una dimensione e considerare un "superficie tridimensionale" immersa in uno spazio a quattro dimensioni. Basta considerare una equazione a quattro incognite, chiamare "spazio quadrimensionale" l'insieme delle sue radici (cioè dei punti di una superficie nello spazio quadrimensionale) e definire al solito i segmenti come le curve continue di tale

<sup>5</sup> Per capire lo schema di tale ragionamento consideriamo il caso semplice in cui  $T$  è la teoria dei gruppi e sia  $\alpha$  la proprietà commutativa. Allora  $\alpha$  non può essere un teorema di  $T$  perché in tale caso tutti i gruppi sarebbero commutativi. In altre parole il mostrare un esempio di gruppo che non è commutativo mostra l'indipendenza di  $\alpha$  da  $T$ .

superficie che siano geodetiche. A tale superficie corrisponderà una geometria a tre dimensioni che in generale risulta essere diversa da quella euclidea.

## 6. Aritmetizzazione della geometria e dell'analisi: le terne di Peano

“Il lettore non troverà figure in questo lavoro. I metodi che esporrò non richiedono costruzioni né geometriche né meccaniche, ma solamente operazioni algebriche, soggette a una procedura regolare e uniforme.”

*Jean Louis Lagrange, Mécanique Analytique*

Se si considera l'importanza che la geometria di Euclide aveva sempre avuto nella cultura occidentale, ci si rende conto di quanto fosse un fatto rivoluzionario e sorprendente la scoperta delle geometrie non euclidee. I pensatori precedenti avevano costantemente ritenuto che vi fosse una sola geometria vera e che le sue leggi fossero necessariamente quelle di Euclide. Inoltre il modo di procedere geometrico era sempre stato visto come un modello a cui ispirarsi in tutti gli altri campi del sapere. L'apparire di tali nuove geometrie confutava tale convinzione perché se più teorie dello spazio contrastanti tra loro sono logicamente possibili e se solo una di queste poteva essere vera, allora la geometria, e più in generale la matematica non poteva più essere considerata uno strumento per giungere alla verità. Prendeva allora piede una nuova concezione della matematica come sistema ipotetico-deduttivo in cui gli assiomi assunti non avevano nessuna pretesa di essere veri. L'unica cosa che si chiedeva ad essi era di essere consistenti. Esamineremo questo punto di vista nel capitolo 4.

Abbiamo già visto quanta importanza ha avuto nella cultura greca la problematica relativa all'infinito e come, da Aristotele in poi, fosse netto il rifiuto dell'infinito attuale. Tale rifiuto fu successivamente condiviso da quasi tutta la cultura occidentale fino alla fine dell'ottocento. Allo stesso tempo l'impetuoso sviluppo dell'analisi matematica dal 1600 in poi aveva fatto sì che l'uso dei metodi infinitari fosse sempre più una cosa inevitabile. L'alternativa che spesso si presentava agli scienziati dell'epoca era tra lo sterile rigore della geometria euclidea e l'uso spregiudicato dei nuovi metodi infinitari del calcolo differenziale ed integrale. A sua volta l'accettazione dei metodi infinitari rendeva l'ambito dell'algebra e della geometria greca troppo ristretto per la matematica moderna. Infatti, per fare un esempio, è chiaro che l'algebra e la geometria suggerivano e permettevano solo lo studio delle funzioni elementari, cioè quelle definibili geometricamente (come le funzioni trigonometriche), quelle definibili algebricamente (come i polinomi o le funzioni razionali) e quelle ottenibili per composizione da queste. Invece lo sviluppo delle serie trigonometriche determinò un enorme allargamento del campo delle funzioni note. Ci si accorse che, a partire dalle note funzioni trigonometriche, ed operando con somme infinite, era possibile pervenire a nuove funzioni che non erano definibili né per via geometrica né per via algebrica. Era quindi necessario dare una definizione più astratta del concetto di funzione che solo la teoria degli insiemi avrebbe potuto permettere.

In definitiva diveniva sempre più pressante l'esigenza di trovare una nuova base alla matematica capace di inquadrare la grande massa dei nuovi risultati e di dare un rigoroso fondamento ai metodi infinitari del calcolo differenziale.

I passi di una tale nuova fondazione consistono essenzialmente:

- a) nell'aritmetizzazione della geometria e dell'analisi,
- b) nella teoria degli insiemi di G. Cantor.

Abbiamo già visto che con Cartesio la geometria era stata ridotta ad un calcolo dei segmenti e quindi, in un certo senso, ridotta all'algebra. Per poter fare completamente a meno della geometria era allora necessario un ulteriore passo: sostituire al calcolo dei segmenti un calcolo numerico che si fondasse su di una definizione di numero reale completamente indipendente dall'intuizione geometrica. Per mostrare come ciò sia possibile dobbiamo definire i numeri naturali, poi gli interi relativi, poi i razionali ed infine i reali. Per fare questo utilizzeremo alcune nozioni elementari di teoria degli insiemi e sulle strutture algebriche, argomenti che supporremo già noti al lettore ma che comunque saranno esposti nei prossimi capitoli.

I numeri naturali, cioè gli interi positivi  $0, 1, 2, \dots$  costituiscono una nozione tanto immediata che probabilmente pretendere di definirla (quindi di ridurla a termini più semplici) non ha molto senso.

Tuttavia lo sforzo di definirli ha il vantaggio di mettere in rilievo le proprietà essenziali di tali numeri. Il sistema comunemente accettato è quello dovuto a Dedekind ed a Peano che assiomatizzano l'idea intuitiva per cui l'insieme dei numeri naturali è la conclusione del processo di "aggiungere un nuovo elemento (il successore) ad un elemento dato".

**Definizione 1.** Diciamo che una struttura algebrica  $(S, succ, z_0)$  con  $s$  operazione 1-aria ed  $z_0 \in S$ , è una *terna di Peano* se sono verificati i seguenti assiomi:

**P1**  $succ : S \rightarrow S$  è una funzione iniettiva

**P2**  $z_0 \notin succ(S)$ , cioè  $z_0$  non è il successivo di nessun elemento

**P3** per ogni sottoinsieme  $D$  di  $S$

$$z_0 \in D \text{ e } succ(D) \subseteq D \Rightarrow D = S.$$

La funzione  $s : S \rightarrow S$  viene chiamata *funzione-successore*, l'elemento  $z_0$  viene chiamato *elemento nullo*. L'assioma **P3** prende anche il nome di *principio di induzione matematica* e può anche essere scritto al modo seguente:

$$z_0 \in X \text{ e } (x \in X \Rightarrow s(x) \in X) \subseteq X \Rightarrow X = S$$

Quando si propone un sistema di assiomi si deve anche provare che esiste almeno un modello del sistema di assiomi proposto. Nel nostro caso dovremmo provare che esiste almeno una terna di Peano. In caso contrario la nostra teoria parlerebbe del nulla. Non è difficile trovare esempi intuitivi di terne di Peano. In effetti tutti i sistemi utilizzati dall'uomo per "contare" sono esempi di terne di Peano. Ne esponiamo due.

Terne di Peano e tacche di legno: Sicuramente uno dei sistemi utilizzati dagli uomini primitivi per contare le pecore di un gregge è quello di mettere delle tacche su di un pezzo di legno. Questo suggerisce che l'insieme delle possibili tacche su un pezzo di legno costituisce un esempio di terna di Peano. In tale caso un pezzo di legno senza tacche rappresenta il primo elemento, l'operazione di aggiungere una tacca è l'operazione successore. Per maggiore precisione dobbiamo identificare due pezzi di legno che abbiano la stessa quantità di tacche come rappresentativi dello stesso numero.

Terne di Peano e scatole con biglie: Possiamo considerare anche l'insieme i cui elementi sono barattoli contenenti biglie di vetro. Un barattolo vuoto corrisponde allo zero. L'operazione di aggiungere una biglia alle biglie di un barattolo corrisponde all'operazione di successivo.

Naturalmente tali esempi non sono di tipo matematico e se volessimo essere più rigorosi dovremmo procedere a qualche forma di "idealizzazione". Ad esempio nel caso dei pezzi di legno con tacche si deve immaginare che esistano infiniti possibili pezzi di legno, almeno uno per ogni possibile sequenza di tacche. Inoltre se due pezzi di legno hanno tre tacche, allora devono essere considerati equivalenti, cioè rappresentativi di un solo oggetto (il numero 3).

Per provare in modo più rigoroso l'esistenza di terne di Peano anticipiamo un po' di teoria degli insiemi proponendo la seguente definizione.

**Definizione 2.** Chiamiamo *infinito* un insieme  $T$  che sia equipotente ad una sua parte propria, cioè tale che esista una funzione iniettiva  $f$  di  $T$  in una sua parte propria  $T' = f(T)$ .

L'esistenza di una terna di Peano equivale ad accettare l'esistenza di un insieme infinito.

**Teorema 3.** Esiste una terna di Peano se e solo se esiste un insieme infinito.

*Dim.* Supponiamo che esista una terna di Peano  $(S, s, z_0)$ , allora essendo la funzione successore iniettiva abbiamo che  $S$  è equipotente a  $s(S)$ . Poiché  $z_0 \notin s(S)$ ,  $s(S)$  è una parte propria di  $S$ . Questo prova che  $S$  è un insieme infinito. Viceversa sia  $T$  un insieme infinito e sia  $f : T \rightarrow T$  una funzione iniettiva tale che  $f(T)$  sia una parte propria di  $T$ . Allora esiste un elemento  $z_0 \notin f(T)$  e possiamo prendere in considerazione la struttura algebrica  $(T, f, z_0)$ . Sia  $S = \langle z_0 \rangle$  la parte stabile generata da  $z_0$ , vogliamo provare che  $(S, f, z_0)$  è una terna di Peano. Infatti, gli assiomi 1. e 2. sono evidenti. Per provare il

principio di induzione basta osservare che  $S$  per costruzione è la più piccola parte stabile contenente  $z_0$ .

E' anche interessante far vedere che molte strutture che i matematici utilizzano usualmente non sono terne di Peano.

Sia  $Z$  l'insieme degli interi relativi, allora  $(Z, s, 0)$ , dove  $s(x) = x+1$  non è una terna di Peano. Infatti l'assioma **P2** non vale in quanto  $0$  è il successore di  $-1$ . Inoltre non vale nemmeno **P3**. Infatti l'insieme  $D$  degli interi maggiori o uguali a zero pur verificando le due condizioni  $0 \in D$  e  $D \subseteq_s(D)$  non coincide con  $Z$ .

Sia  $R^+$  l'insieme dei reali maggiori o uguali a zero, allora  $(R^+, s, 0)$  non è una terna di Peano. Infatti anche se gli assiomi **P1** e **P2** sono soddisfatti **P3** non è soddisfatto.

Sia  $Z/m$  l'insieme degli interi modulo  $m$  e consideriamo la struttura  $(Z/m, s, [0])$  dove  $s([x]) = [x]+[1] = [x+1]$ . E' evidente che **P3** è verificata, tuttavia **P2** non vale in quanto  $[0]$  è successore di  $[m-1]$ . Ne segue che  $(Z/m, s, [0])$  non è una terna di Peano.

**Esercizio.** Consideriamo la struttura  $(N_0, s, \leq, z_0)$  con  $N_0$  insieme dei numeri naturali,  $z_0 = 0$  ed  $s$  definita dal porre  $s(n) = 2n+1$ . Dire se tale struttura è una terna di Peano.

**Esercizio.** Consideriamo la struttura  $(P, s, \leq, z_0)$  con  $P$  insieme dei numeri naturali pari,  $z_0 = 2$  ed  $s$  definita dal porre  $s(n) = n+2$ . Dire se tale struttura è una terna di Peano.

**Esercizio.** Consideriamo la struttura  $(S, s, \leq, z_0)$  con  $S$  insieme dei numeri naturali maggiori o uguali a 5,  $z_0 = 5$  ed porre  $s(n) = n+1$ . Dire se tale struttura è una terna di Peano.

## 7. Principio di induzione e definizioni per ricorsione per definire i numeri naturali

In una terna di Peano è possibile effettuare dimostrazioni per induzione: vale infatti la seguente proposizione.

**Proposizione 1.** Supponiamo che una proprietà  $P$  sia definita in una terna di Peano  $(S, s, z_0)$  e che:

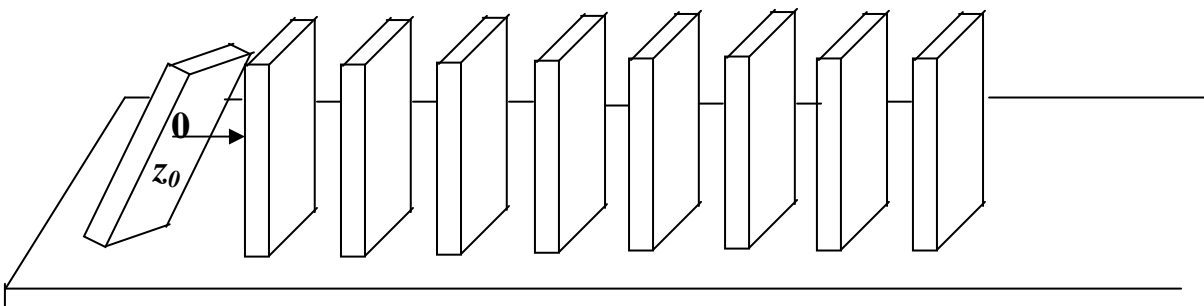
- $P$  è verificata da  $z_0$
- se  $P$  è verificata da  $x$  allora è verificata da  $s(x)$

allora

$P$  è verificata per ogni  $x \in S$ .

*Dim.* Sia  $D$  l'insieme degli elementi che verificano  $P$ , allora  $D$  contiene  $z_0$  ed è tale che  $s(D) \subseteq D$ . Pertanto tale insieme coincide con  $S$ .

L'applicazione del principio di induzione può essere visualizzata al modo seguente. Consideriamo la seguente figura in cui i pezzi del gioco domino sono poggiati su di un tavolo (infinito) uno dopo l'altro:



Indichiamo il primo pezzo della fila con  $z_0$ . Vale la regola che se un pezzo cade (a destra) allora il pezzo successivo cade.

$$\forall x \text{Cade}(x) \rightarrow \text{Cade}(s(x))$$

poi supponiamo che valga

$$\text{Cade}(z_0)$$

Allora è evidente che vale  $\forall x \text{Cade}(x)$ , cioè che tutti i pezzi cadono.

Nelle terne di Peano è possibile definire per ricorsione funzioni ed operazioni. Ad esempio, è definita per ricorsione la funzione fattoriale, che chiamiamo *fatt* in quanto tale funzione soddisfa le due equazioni

$$fatt(0) = 1 \quad ; \quad fatt(n+1) = fatt(n) \cdot (n+1).$$

La definizione generale di definizione per ricorsione è la seguente.

**Definizione 2.** Sia  $(S, s, z_0)$  una terna di Peano,  $T$  un insieme,  $g : S^{n-1} \rightarrow T$  e  $h : S^{n-1} \rightarrow T$  due funzioni, allora diciamo che  $f : S^n \rightarrow T$  è definita per *ricorsione primitiva* da  $g$  ed  $h$  se  $f$  soddisfa le seguenti equazioni:

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = g(x_1, \dots, x_{n-1}) \quad ; \quad f(x_1, \dots, x_{n-1}, y+1) = h(x_1, \dots, x_{n-1}, y, f(x_1, \dots, x_{n-1}, y)). \quad (1)$$

La prima equazione viene detta "*assegnazione iniziale*" mentre la seconda "*schema di ricorsione*". Perché una tale definizione abbia senso è necessario il seguente teorema la cui dimostrazione è abbastanza noiosa e quindi viene omessa.

**Teorema 3.** Date le funzioni  $g$  ed  $h$  esiste ed è unica una funzione  $f$  che soddisfa le equazioni in (1). Tale funzione è definita ovunque.

Una prima applicazione di questo teorema permette di provare che la teoria delle terne di Peano è *categorica* cioè tutti i modelli della teoria sono isomorfi tra loro.

**Teorema 4.** La teoria delle terne di Peano è categorica, cioè tutte le terne di Peano sono isomorfe tra loro.

*Dim.* Siano  $(S, s, z_0)$  e  $(S', s', z_0')$  due terne di Peano, allora possiamo definire per ricorsione la funzione  $f : S \rightarrow S'$  ponendo

$$f(z_0) = z_0' \quad ; \quad f(s(x)) = s'(f(x)). \quad (2)$$

Tale funzione per definizione è un omomorfismo. Non è difficile provare poi che  $f$  è un isomorfismo, cioè che è iniettiva e suriettiva.

Per ricorsione è possibile anche definire le operazioni aritmetiche.

**Definizione 5.** In ogni terna di Peano  $(S, s, z_0)$  chiamiamo *addizione* una funzione  $som : S \times S \rightarrow S$  che soddisfi le due equazioni:

$$som(x, z_0) = x \quad ; \quad som(x, s(y)) = s(som(x, y)). \quad (3)$$

Chiamiamo *moltiplicazione* una funzione  $pro : S \times S \rightarrow S$  che soddisfi le due equazioni

$$pro(x, z_0) = z_0 \quad ; \quad pro(x, s(y)) = som(pro(x, y), x). \quad (4)$$

In generale la funzione addizione viene indicata con il simbolo  $+$  e la funzione di moltiplicazione con un puntino  $\cdot$ . Inoltre si preferiscono le notazioni *infixe*  $x+y$  e  $x \cdot y$  al posto delle notazioni *prefisse*  $som(x, y)$  e  $pro(x, y)$ . Da notare che se provassimo ad estendere la definizione di addizione data ai numeri reali ci sarebbero subito delle difficoltà. Questo perché nell'insieme dei numeri reali non vale il principio di induzione. Ad esempio il tentativo di calcolare  $som(1, 2.5)$  condurrebbe a calcolare  $som(1, 2.5)$ , e quindi  $som(1, 0.5)$  e quindi  $som(1, -0.5)$  e poi  $som(1, -1.5)$  e così all'infinito.

Vogliamo ora definire una relazione d'ordine in una terna di Peano in modo che  $x \leq s(x)$ .

**Definizione 6.** Chiamiamo *percorso* da  $x$  ad  $y$  una successione  $x_1, \dots, x_n$  tale che  $x = x_1$ ,  $x_n = y$  e  $x_i = s(x_{i-1})$ . Definiamo in  $(S, s, z_0)$  la relazione  $\leq$  ponendo

$$x \leq y \Leftrightarrow x = y \text{ oppure esiste un percorso da } x \text{ ad } y.$$

In altre parole  $x \leq y$  se esiste un intero  $n$  tale che  $s^n(x) = y$ . Vale il seguente teorema.

**Teorema 7.** La relazione  $\leq$  definita in una terna di Peano è la relazione di pre-ordine *generata* dalla relazione di successore (cioè è la più piccola relazione transitiva e riflessiva contenente l'insieme

$\{(x, s(x)) : x \in S\}$  di coppie). Tale relazione è di ordine totale. Più precisamente è un *buon ordinamento*, cioè è tale che ogni sottoinsieme non vuoto di  $S$  ammette minimo.

*Dim.* Per definizione  $\leq$  è una relazione riflessiva. Inoltre

$$x \leq y, y \leq z \Rightarrow \exists n, m \quad y = s^n(x) \text{ e } z = s^m(y) \Rightarrow z = s^{n+m}(x) \Rightarrow x \leq z.$$

e questo prova che  $\leq$  è una relazione transitiva. E' evidente che  $\leq$  contiene l'insieme  $\{(x, s(x)) : x \in S\}$  di coppie, cioè che  $x \leq s(x)$ . Se  $R$  è una relazione di pre-ordine contenente  $\{(x, s(x)) : x \in S\}$  e  $x \leq y$ , allora un percorso  $x = x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = y$  è anche tale che  $x = x_1 R x_2, \dots, x_{n-1} R x_n = y$ . Pertanto, per la proprietà transitiva di  $R$ ,  $x R y$ . Questo significa che ogni relazione di pre-ordine  $R$  contiene  $\leq$ . Pertanto  $\leq$  è la più piccola relazione di pre-ordine che contiene la relazione di "essere successore".

Per provare che vale la proprietà anti-simmetrica, cominciamo con il provare che:

(\*) per ogni  $x, x \neq s^n(x)$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

Infatti (\*) è vero per  $x = 0$  in quanto  $0$  non è successore di nessun elemento. Supponiamo che (\*) sia vera per  $x$ , cioè che  $x \neq s^n(x)$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Allora, poiché  $s$  è una funzione iniettiva, sarà anche  $s(x) \neq s(s^n(x)) = s^{n+1}(x)$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Pertanto (\*) è vera anche per  $s(x)$ . Per il principio di induzione possiamo concludere che (\*) è vera per ogni  $x \in S$ .

Supponiamo ora che  $x \leq y$  e  $y \leq x$  e che  $x \neq y$ . Allora esistono due interi positivi tali che  $x = s^n(y)$  e  $y = s^m(x)$ . In questo caso si avrebbe che  $y = s^{n+m}(y)$  in contrasto con (\*).

Per dimostrare che  $\leq$  è totale, dato un elemento  $x$ , consideriamo l'insieme  $Conf(x) = \{y \in S : 0 \leq x \leq y \text{ oppure } y \leq x\}$  degli elementi confrontabili con  $x$ . E' evidente che  $0 \in Conf(x)$ . Supponiamo che  $y \in Conf(x)$ , allora nel caso  $x \leq y$  risulta anche che  $x \leq y \leq s(y)$  e quindi  $s(y) \in Conf(x)$ . Nel caso  $y < x$ , cioè  $x = s^n(y)$  per un opportuno  $n$ , allora  $s(y) \leq x$  e quindi  $s(y) \in Conf(x)$ . In definitiva abbiamo che  $Conf(x) = S$  e quindi che ogni elemento è confrontabile con  $x$ .

Per provare che  $\leq$  è un buon ordinamento, sia  $X$  un sottoinsieme non vuoto di  $S$  ed indichiamo con  $M$  l'insieme dei minoranti di  $X$ . E' evidente che  $0 \in M$ , pertanto se fosse  $s(x) \in M$  per ogni  $x \in M$ , avremmo che  $M = S$  e quindi tutti gli elementi sarebbero minoranti di  $M$ . Esiste pertanto  $m \in M$  tale che  $s(m) \notin M$ . Poiché  $s(m)$  non è un minorante e  $\leq$  è totale, esiste  $x' \in X$  tale che  $m \leq x' < s(m)$ . Ciò implica che  $m = x' \in M$  e quindi che  $m$  è un minimo.

Possiamo concludere questo paragrafo con la seguente definizione

**Definizione 8.** Chiamiamo *sistema di numeri naturali* la struttura algebrica  $(S, \leq, +, \cdot, z_0)$  che si ottiene definendo in una terna di Peano  $(S, s, z_0)$  le operazioni di ordinamento, addizione e moltiplicazione.

**Paradosso:** Trovare l'errore nella dimostrazione del seguente teorema:

**Teorema:** Tutte le persone hanno la stessa età

Dimostrazione: Indichiamo con  $S(n)$  l'asserzione "in un gruppo di  $n$  persone tutte hanno la stessa età".

Passo 1:  $S(1)$  è ovviamente vera

Passo 2: Supponiamo che  $S(n)$  sia vera: vogliamo provare che  $S(n+1)$  è vera. Sia  $G$  un gruppo con  $n+1$  persone e siano  $P_1$  e  $P_2$  due persone del gruppo. Allora, detta  $P$  una qualunque persona diversa da  $P_1$  e  $P_2$  in  $G - \{P\}$  esistono  $n$  persone e quindi, per ipotesi di induzione, in  $G - \{P\}$  tutte le persone hanno la stessa età. In particolare  $P_1$  ha la stessa età di  $P_2$ .

## 8. Variazioni sul principio di induzione

E' possibile introdurre il principio di induzione in termini più algebrici al modo seguente. Ricordiamo che viene chiamata *parte stabile* di una struttura algebrica  $A$  ogni sottoinsieme di  $A$  che contenga gli elementi designati e che sia chiuso rispetto alle operazioni della struttura. Ad esempio in un gruppo  $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$  una parte stabile è un sottoinsieme  $G'$  di  $G$  contenente  $1$  e tale che il prodotto di

due elementi di  $G'$  appartiene ancora a  $G'$ , l'inverso di un elemento in  $G'$  appartiene ancora a  $G'$ . In definitiva le parti stabili di  $G$  coincidono con i sottogruppi di  $G$ .

**Proposizione 1.** Una struttura algebrica  $(S, s, z_0)$  soddisfacente 1. e 2. è una terna di Peano se e solo se ammette  $z_0$  come generatore, cioè se  $S$  è la più piccola parte stabile contenente  $z_0$ .

*Dim.* Ovvio perché il principio di induzione afferma proprio che ogni parte  $X$  che sia stabile rispetto all'operazione  $s$  e che contenga  $z_0$  coincide con  $S$ .

Tale modo di rappresentare le terne di Peano suggerisce la seguente estensione del principio di induzione.

**Proposizione 2.** Sia  $(S, h_1, \dots, h_n, z_0, \dots, z_m)$  una struttura algebrica avente  $z_0, \dots, z_m$  come sistema di generatori. Supponiamo inoltre che  $P$  sia una proprietà tale che:

- $P$  è verificata da  $z_0, \dots, z_m$
- per ogni operazione  $n$ -aria  $h_i$  se  $P$  è verificata da  $x_1, \dots, x_n$  allora è verificata da  $h_i(x_1, \dots, x_n)$ .

Allora  $P$  è verificata per ogni  $x \in S$ .

**Esempio: "Principio di induzione" per  $\mathbb{Z}$ :**

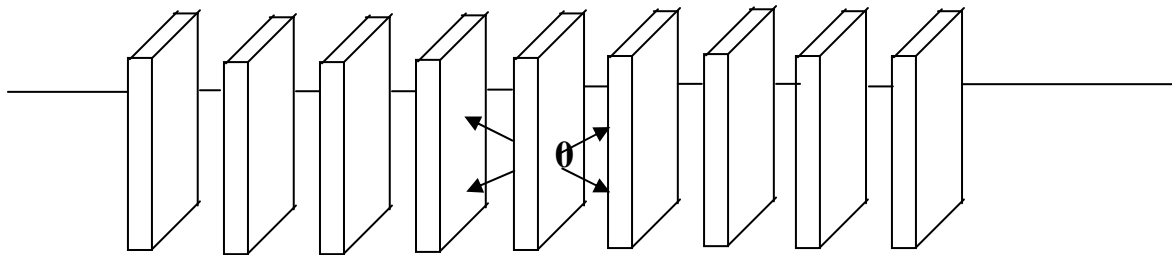
Abbiamo già osservato che la struttura  $(\mathbb{Z}, s, 0)$ , dove  $s(x) = x+1$ , non è una terna di Peano e che quindi in  $\mathbb{Z}$  non sarebbe possibile fare dimostrazioni per induzione. Tuttavia se vogliamo provare che una proposizione vale per ogni elemento di  $\mathbb{Z}$  possiamo riferirci alla struttura algebrica  $(\mathbb{Z}, s_+, s_-, 0)$  dove  $s_+(x) = x+1$  e  $s_-(x) = x-1$ . Infatti la sottostruttura di  $(\mathbb{Z}, s_+, s_-, 0)$  generata da 0 coincide con  $(\mathbb{Z}, s_+, s_-, 0)$ , cioè 0 è un generatore della struttura  $(\mathbb{Z}, s_+, s_-, 0)$ . Se volessimo formulare un principio di induzione per  $\mathbb{Z}$  dovremmo quindi dire:

Supponiamo che una proprietà  $P$  sia definita in  $\mathbb{Z}$  e che:

- $P$  è verificata da 0
- se  $P$  è verificata da  $x$  allora è verificata da  $x+1$
- se  $P$  è verificata da  $x$  allora è verificata da  $x-1$ .

Allora  $P$  è verificata per ogni  $x \in \mathbb{Z}$ .

Per visualizzare tale principio supponiamo che i pezzi del gioco del domino si estendano all'infinito sia verso destra che verso sinistra e che siano esplosivi.



Supponiamo inoltre che:

- il pezzo **0** esplode
  - se un pezzo  $x$  esplode allora fa esplodere i due pezzi vicini, cioè sia il pezzo successivo  $s_+(x)$  che quello precedente  $s_-(x)$
- allora è evidente che tutti i pezzi esplodono.

**Esempio: il principio di induzione in  $\mathbb{Z}/m$ .** Abbiamo già osservato che la struttura  $(\mathbb{Z}/m, s, [0])$  non è una terna di Peano. Tuttavia è vero che  $[0]$  è un generatore di tale struttura poiché ogni intero modulo  $m$  si può ottenere a partire da  $[0]$  ed applicando un certo numero di volte  $s$ . Pertanto in effetti pur non essendo tale struttura una terna di Peano continua a valere il principio di induzione.

Il fatto che  $\leq$  sia una relazione di buon ordine consente di stabilire un'altra forma del principio di induzione che prende il nome di *principio di induzione transfinita*.

**Proposizione 3 (Principio di induzione transfinita).** Consideriamo una terna di Peano  $(S, s, z_0)$  la cui relazione d'ordine indichiamo con  $\leq$  ed una proprietà  $P$  definita in  $S$ . Allora se è verificata l'implicazione

- i)  $P$  vale per ogni  $x < y \Rightarrow P$  vale per  $y$   
 possiamo concludere che  
 ii)  $P$  vale per ogni  $x \in S$ .

*Dim.* Supponiamo che valga i). Se per assurdo non fosse vera ii), allora l'insieme  $X$  degli elementi di  $S$  per cui  $P$  è falsa sarebbe non vuoto e quindi ammetterebbe un minimo  $x_0$ . Poiché  $x_0 \in X$  in tale minimo  $P$  sarebbe falsa. D'altra parte per tutti gli elementi  $x < x_0$  essendo  $x \notin X$ ,  $P$  dovrebbe essere vera. Ciò contrasta con i).

### 9. L'anello degli interi relativi ed il campo dei razionali.

I numeri naturali sono uno strumento per misurare la grandezza di insiemi finiti. Ad esempio la terna di Peano delle possibili tacche su di un pezzo di legno può avere come scopo il contare il numero di pecore o il numero dei giorni passati od altro. Tuttavia esistono tipi di attività in cui i numeri naturali si mostrano inadeguati.

**I numeri relativi.** Supponiamo ad esempio di dovere distinguere in una contabilità i soldi che devono essere dati dai soldi che si devono ricevere da alcuni clienti. Se la contabilità è tenuta su due colonne avremo una situazione del tipo

Cliente	Avere	Dare
Carlo	7	5
Luigi	3	6
...	...	...

Ne segue che l'informazione relativa a Carlo è rappresentata dalla coppia  $(7,5)$ , l'informazione relativa a Luigi è rappresentata dalla coppia  $(3,6)$ . Ciò suggerisce l'introduzione di un nuovo tipo di numero costituito da due parti (quindi una coppia) che hanno significato diverso. Pertanto partiamo dall'insieme dei numeri naturali  $N$  (compreso lo zero) e consideriamo l'insieme  $N \times N$ . Oltre all'interpretazione di una coppia in termini di debiti e crediti, sono possibili diverse interpretazioni. Ad esempio possiamo interpretare una coppia  $(n,m)$

- come l'operazione "aggiungere  $n$  e togliere  $m$ ".
- come "fare  $n$  passi avanti ed  $m$  passi indietro"
- come "applicare una forza di grandezza  $n$  in una direzione ed una forza di grandezza  $m$  nella direzione opposta".

Nell'insieme di coppie definiamo una operazione di addizione ponendo

$$(n,m) + (a,b) = (n+a, m+b). \quad (1)$$

Il motivo per cui la somma viene definita in questo modo è ovvio. Se si fanno  $n$  passi avanti ed  $m$  indietro e poi si fanno  $a$  passi avanti e  $b$  indietro, allora globalmente si sono fatti  $n+a$  passi avanti ed  $m+b$  indietro. La definizione di somma, che è associativa, permette di definire il multiplo  $n$ -esimo di un elemento  $(a,b)$  come l'elemento che si ottiene sommando  $n$  volte a se stessa la coppia  $(a,b)$ . Ciò permette di scomporre ogni coppia  $(m,n)$  al modo seguente

$$(m,n) = (m,0) + (0,n) = m \cdot (1,0) + n \cdot (0,1).$$

Se si indica con  $1$  la coppia  $(1,0)$  e con  $-1$  la coppia  $(0,1)$  possiamo scrivere tale scomposizione al modo seguente:

$$(m,n) = (m,0) + (0,n) = m \cdot (+1) + n \cdot (-1).$$

Più problematico è giustificare il prodotto perché, ad esempio, non ha molto senso moltiplicare passi avanti con passi indietro. La giustificazione comunque è possibile trovarla nel fatto che noi vogliamo che il prodotto sia definito in modo che valga la proprietà distributiva del prodotto rispetto la somma.

**Proposizione 1.** Supponiamo di volere definire una operazione  $\cdot$  in  $N \times N$  in modo che:

- i) valga la proprietà distributiva di  $\cdot$  rispetto a  $+$
- ii) il prodotto per 1 lascia immutati i valori (cioè 1 è l'elemento neutro)
- iii) il prodotto per  $-1 = (0,1)$  commuta la prima e la seconda componente.

Allora l'unica possibile definizione è porre

$$(n,m) \cdot (a,b) = (na+mb, nb+ma). \quad (1)$$

*Dim.* Sia  $*$  una operazione binaria che verifica le condizioni i), ii), iii). Allora

$$\begin{aligned} (n,m) * (a,b) &= [(n,0)+(0,m)] * (a,b) = (n,0) * (a,b) + (0,m) * (a,b) \\ &= n \cdot [(1,0) * (a,b)] + m \cdot [(0,1) * (a,b)] = n \cdot [(a,b)] + m \cdot (b,a) \\ &= (na+mb, nb+ma) = (n,m) \cdot (a,b). \end{aligned}$$

Viceversa, supponiamo che  $\cdot$  sia definita tramite l'equazione (1), allora con un po' di calcoli è facile verificare che tale operazione verifica i), ii) e iii).

Si noti che invece delle condizioni ii) e iii) si possono porre anche le condizioni più semplici

$$1 * 1 = 1, 1 * (-1) = -1, (-1) * 1 = -1, (-1) * (-1) = 1. \quad (2)$$

Infatti se si ammettono tali condizioni allora per la proprietà distributiva risulterà

$$\begin{aligned} (1,0) * (a,b) &= (1,0) * [(a,0) + (0,b)] = (1,0) * (a,0) + (1,0) * (0,b) \\ &= a \cdot [(1,0) * (1,0)] + b \cdot [(1,0) * (0,1)] \\ &= a \cdot (1,0) + b \cdot (1,0) = (a,b) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (0,1) * (a,b) &= (0,1) * (a,0) + (0,1) * (0,b) = a \cdot [(0,1) * (1,0)] + b \cdot [(0,1) * (0,1)] \\ &= a \cdot (0,1) + b \cdot (1,0) = (b,a). \end{aligned}$$

**Proposizione 2.** La struttura  $(N \times N, +, (0,0))$  è associativa e commutativa ed ammette  $(0,0)$  come elemento neutro. Il prodotto è associativo commutativo ed ammette  $+1$  come elemento neutro. Inoltre vale la proprietà distributiva. Tuttavia  $(N \times N, +, (0,0))$  non è un gruppo e quindi  $(N \times N, +, \cdot, (0,0), (1,1))$  non è un anello.

*Dim.* Ci limitiamo ad osservare che, dato un elemento  $(m,n)$  diverso da  $(0,0)$ , qualunque sia  $(a,b)$  risulta che  $(m,n) + (a,b) = (m+a, n+b) \neq (0,0)$ . Pertanto nella struttura  $(N \times N, +, (0,0))$  non esiste l'opposto di  $(m,n)$ .

Poiché  $(N \times N, +, \cdot, (0,0), (1,0))$  non è un anello, non può rappresentare l'anello degli interi relativi. E' possibile però ottenere un anello se si effettua un opportuno quoziente di tale struttura modulo una opportuna relazione di congruenza. Tale relazione è suggerita in modo naturale dalle interpretazioni che abbiamo dato di una coppia. Infatti, ad esempio, è naturale porre  $(n,m) \equiv (n',m')$  se fare  $n$  passi avanti ed  $m$  indietro produce lo stesso risultato di fare  $n'$  passi avanti ed  $m'$  indietro. Naturalmente non possiamo esprimere ciò dicendo che  $n - m = n' - m'$  poiché se  $n < m$  non ha senso in  $N$  scrivere  $n - m$ . Allora viene proposta la seguente definizione:

**Definizione 3.** Indichiamo con  $\equiv$  la relazione in  $N \times N$  definita ponendo,

$$(n,m) \equiv (n',m') \Leftrightarrow n+m' = m+n'. \quad (2)$$

**Proposizione 4.** La relazione  $\equiv$  è una relazione di equivalenza compatibile con le operazioni di somma e prodotto ed è pertanto una congruenza della struttura algebrica  $(N \times N, +, \cdot, (0,0), (1,0))$ .

*Dim.* Proviamo che

$$(n,m) \equiv (n',m'), (a,b) \equiv (a',b') \Rightarrow (n+a, m+b) \equiv (n'+a', m'+b').$$

Infatti per ipotesi  $n+m' = m+n'$  e  $a+b' = b+a'$ , da cui, sommando termine a termine

$n+m'+a+b' = m+n'+b+a'$  che equivale a  $(n+a, m+b) \equiv (n'+a', m'+b')$ . La dimostrazione della compatibilità rispetto al prodotto viene omessa.  $\square$

**Definizione 5.** Indichiamo con  $Z$  la struttura quoziente di  $(N \times N, +, \cdot, (0,0), (1,0))$  modulo  $\equiv$  e chiamiamo *anello degli interi relativi* tale struttura.

Precisamente  $Z$  è definita dalle equazioni

$$[(n,m)] = \{(n',m') \mid (n',m') \equiv (n,m)\}; \quad Z = \{[(n,m)] \mid (n,m) \in N \times N\}$$

$$[(n,m)] + [(a,b)] = [(n+a, m+b)] \quad ; \quad [(n,m)] \cdot [(a,b)] = [(na+mb, nb+ma)].$$

**Esercizio.** Provare che  $[(1,0)]$  è l'elemento neutro rispetto al prodotto in  $Z$ .

**Esercizio.** Dire perché è sbagliato definire l'operazione  $\otimes$  definita ponendo  $[(n,m)] \otimes [(a,b)] = [(na, mb)]$ .

**Il campo dei razionali.** In modo analogo si passa da  $Z$  al campo dei numeri razionali. In questo caso consideriamo l'insieme

$$Z \times (Z - \{0\}) = \{(p,q) \mid p \in Z, q \in Z, q \neq 0\}.$$

L'interpretazione che ora diamo alla coppia  $(p,q)$  è "moltiplicare per  $p$  e dividere per  $q$ ". In tale insieme introduciamo due operazioni tramite le eguaglianze

$$(p,q) + (a,b) = (pb+qa, qb) \quad ; \quad (p,q) \cdot (a,b) = (pa, qb). \quad (3)$$

In tale modo viene definita una struttura algebrica  $(Z \times (Z - \{0\}), +, \cdot, (0,1), (1,1))$ .

**Proposizione 6.** Nella struttura  $(Z \times (Z - \{0\}), +, \cdot, (0,1), (1,1))$  le operazioni sono commutative ed associative,  $(0,1)$  è elemento neutro rispetto a  $+$ ,  $(1,1)$  è elemento neutro rispetto a  $\cdot$ . Tuttavia tale struttura non è un campo.

*Dim.* Poiché  $(p,q) + (0,1) = (p1+q0, q1) = (p,q)$ , la coppia  $(0,1)$  è elemento neutro rispetto la somma. In modo simile si provano le altre proprietà. Per provare che la struttura non è un campo osserviamo che se una coppia  $(p,q)$  ammettesse inverso allora esisterebbero due interi  $x$  ed  $y$  in  $Z$  tali che  $(p,q) \cdot (x,y) = (1,1)$ , si avrebbe pertanto che  $px = 1$  e  $qy = 1$ , e quindi  $p$  e  $q$  sarebbero invertibili in  $Z$ . Poiché gli unici elementi invertibili di  $Z$  sono  $1$  e  $-1$ , ne segue che gli unici elementi invertibili  $(p,q)$  in  $(Z \times (Z - \{0\}), +, \cdot, (0,1), (1,1))$  sono le coppie  $(1,1)$  e  $(-1,-1)$ ,  $(1,-1)$  e  $(-1,1)$  che ammettono come inverso se stesse.

Inoltre introduciamo la relazione di equivalenza

$$(p,q) \equiv (p',q') \Leftrightarrow p \cdot q' = q \cdot p'. \quad (4)$$

La dimostrazione della seguente proposizione viene lasciata al lettore.

**Proposizione 7.** La relazione  $\equiv$  definita in (4) è compatibile con le operazioni definite in (3) ed è pertanto una congruenza. La struttura  $(Q, +, \cdot, (0,1))$  quoziente di  $(Z \times (Z - \{0\}), +, \cdot, (0,1), (1,1))$  modulo  $\equiv$  è un campo che chiamiamo *campo dei numeri razionali*.

*Dim.* Per prima cosa ricordiamo che  $(Q, +, \cdot, (0,1))$  è definita dalle equazioni

$$[(p,q)] = \{(p',q') \mid (p',q') \equiv (p,q)\} \quad ; \quad Z = \{[(p,q)] \mid (p,q) \in N \times N\}$$

$$[(p,q)] + [(a,b)] = [(pb+qa, qb)] \quad ; \quad [(p,q)] \cdot [(a,b)] = [(p \cdot a, q \cdot b)].$$

$$0 = [(0,1)] \quad ; \quad 1 = [(1,1)].$$

Per provare, ad esempio, che  $[(p,q)]$  ammette opposto, osserviamo che  $[(p,q)] + [(-p,q)] = [(pq-pq, q \cdot q)] = [(0, q \cdot q)]$ . D'altra parte, poiché  $(0,1) \equiv (0, q \cdot q)$ , la classe  $[(0, q \cdot q)]$  coincide con la classe  $[(0,1)] = 1$ . In conclusione l'opposto di  $[(p,q)]$  è  $[(-p,q)]$ . In modo analogo si provano le altre proprietà di campo.

**Problema.** Poiché siamo liberi di definire le operazioni in un insieme per inventare nuove strutture algebriche, supponiamo di definire nell'insieme dei numeri razionali l'operazione  $\oplus$  ponendo

$$n/m \oplus p/q = (n^2+m^2)/(p^2+q^2).$$

1. Dire se l'operazione definita in questo modo è commutativa.

2. Dire perché è sbagliato chiedersi se l'operazione definita in questo modo è commutativa.

## 10. I numeri reali tramite le sezioni e tramite le successioni

Più delicato è il passaggio dai razionali ai reali. Seguiamo ad esempio il metodo delle sezioni di Dedekind. L'idea che è alla base del concetto di sezione è la seguente. Supponiamo di muoverci nell'ambito di una classe  $(G, =, <, +)$  di grandezze omogenee in cui sia stata fissata una unità di

misura  $u \in G$ . Allora se  $g$  è una grandezza da misurare, un primo tentativo di misurazione consisterà nel prendere multipli successivi di  $u$  fino a raggiungere  $g$ . Se si trova un intero  $p$  tale che  $p \cdot u = g$  allora è possibile concludere che  $p$  è la misura cercata. Altrimenti si considera  $p$  tale che  $p \cdot u < g < (p+1) \cdot u$  e si dice che  $p$  è una misura per difetto e  $p+1$  una per eccesso di  $g$ . Una misurazione più precisa si può allora avere dividendo  $u$  in  $q$  parti ed assumendo come sotto-unità di misura  $u' = u/q$ . Ora potrebbe capitare che per un opportuno  $p$  risulti che  $p \cdot u' = (p/q) \cdot u = g$ . In tale caso si concluderebbe che la misura cercata è  $p/q$ . Se invece ciò non accade allora potremmo lo stesso trovare  $p$  tale che  $p \cdot u' < g < (p+1) \cdot u'$  e quindi  $(p/q) \cdot u < g < (p+1)/q \cdot u$  e concludere che  $p/q$  è una misura per difetto e  $(p+1)/q$  per eccesso di  $g$ . Potrebbe addirittura capitare che  $u$  e  $g$  siano incommensurabili, cioè che non esista un razionale  $p/q$  tale che  $g = (p/q) \cdot u$  (come nel caso della diagonale e del lato del quadrato). Allora in tale caso possiamo comunque considerare l'insieme  $A$  dei razionali che misurano per difetto  $g$  e l'insieme  $B$  dei razionali che misurano per eccesso  $g$

$$A = \{ p/q \mid (p/q) \cdot u < g \}, \quad B = \{ p/q \mid (p/q) \cdot u > g \}.$$

D'altra parte se  $u$  e  $g$  sono commensurabili, ad esempio  $u = (n/m) \cdot g$ , per questione di uniformità di notazione indicheremo con  $A$  l'insieme dei razionali minori di  $n/m$  e con  $B$  l'insieme dei razionali maggiori di  $n/m$ . In ogni caso viene individuata una coppia  $(A, B)$  di insiemi di razionali in cui, ripetiamo, la prima componente è vista come l'insieme delle misure per difetto e la seconda componente come l'insieme delle misure per eccesso della grandezza  $g$ . È facile verificare che:

- $A$  e  $B$  sono disgiunti (una misura per difetto non può essere una misura per eccesso)
- esiste al più un solo razionale che non appartiene ad  $A \cup B$
- $x \in A, y \leq x \Rightarrow y \in A$  ;  $x \in B, y \geq x \Rightarrow y \in B$ .
- $A$  è privo di massimo,  $B$  è privo di minimo.

Il metodo delle sezioni in un certo senso chiama numero reale una coppia di sottoinsiemi di  $Q$  di questo tipo.

**Definizione 1.** Una *sezione del campo dei numeri razionali* è una coppia  $(A, B)$  di sottoinsiemi di  $Q$  tali che:

- $A$  e  $B$  sono disgiunti
- o  $A \cup B = Q$  oppure esiste un razionale  $r$  tale che  $A \cup B = Q - \{r\}$
- $x \in A, y \leq x \Rightarrow y \in A$  ;  $x \in B, y \geq x \Rightarrow y \in B$ .
- $A$  è privo di massimo,  $B$  è privo di minimo.

Indichiamo con  $R$  l'insieme delle sezioni. Semplici esempi di sezioni si ottengono fissando un numero razionale  $r$  e considerando la sezione  $(A_r, B_r)$  in cui

$$A_r = \{x \in Q \mid x < r\} \quad ; \quad B_r = \{x \in Q \mid x > r\}$$

È evidente che in questo caso  $A \cup B = Q - \{r\}$ . Ponendo  $f(r) = (A_r, B_r)$ , si definisce una funzione  $f: Q \rightarrow R$ . Questa funzione è iniettiva e permette di identificare ogni razionale con una sezione tale che  $A \cup B = Q - \{r\}$ . Chiamiamo *razionale* ogni sezione di tale tipo. Nel seguito indicheremo con  $1$  la sezione  $r_1 = (\{x \in Q \mid x < 1\}, \{x \in Q \mid x > 1\})$  e con  $0$  la sezione  $r_0 = (\{x \in Q \mid x < 0\}, \{x \in Q \mid x > 0\})$  e così via.

D'altra parte esistono sezioni che non sono di questo tipo. Ad esempio la coppia

$$A = \{x \in Q \mid x \geq 0, x^2 < 2\} \cup (-\infty, 0) \quad ; \quad B = \{x \in Q \mid x^2 > 2\}$$

che, in un certo senso, rappresenta il numero  $\sqrt{2}$  è tale che  $A \cup B = Q$ . Chiamiamo *irrazionale* ogni sezione  $(A, B)$  di tale tipo, cioè tale che  $A \cup B = Q$ . In tale senso la classe delle sezioni è una estensione propria dell'insieme dei numeri razionali.

**Problema.** Dimostrare che la coppia  $(A, B)$  sopra definita è una sezione e che tale sezione non è definita da nessun razionale.

Per definire le operazioni aritmetiche tra numeri reali, dati due insiemi  $X$  ed  $Y$ , poniamo

$$X+Y = \{x+y \mid x \in X, y \in Y\} \quad ; \quad X \cdot Y = \{x \cdot y \mid x \in X, y \in Y\}$$

**Definizione 2.** Chiameremo *campo dei numeri reali* la struttura algebrica  $R = (R, +, \cdot, 0, 1)$  dove  $R$  è l'insieme delle sezioni ed in cui le operazioni di addizione e di moltiplicazione sono definite al modo seguente

$$(A,B) + (A',B') = (A+A', B+B') \quad ; \quad (A,B) \cdot (A',B') = (A \cdot A', B \cdot B')$$

e la relazione  $\leq$  è definita ponendo  $(A,B) \leq (A',B')$  se e solo se ogni elemento di  $A$  minore di ogni elemento di  $B'$ .

Naturalmente si dovrebbe provare che tali operazioni danno ancora come risultato una sezione, ad esempio che la somma di due sezioni è ancora una sezione. Inoltre si dovrebbe provare che la struttura definita in questo modo è un campo completo archimedeo. Le dimostrazioni di tali proprietà sono laboriose e noiose e quindi non vengono date.

Una definizione del campo dei numeri reali che è molto più vicina al modo di procedere dei matematici si ottiene partendo dalle successioni di razionali. Infatti in matematica quando si manipola un numero reale o lo si rappresenta come espansione decimale infinita (quindi come serie di potenze) oppure, più in generale, tramite una successione il cui limite è il numero reale in questione. Indichiamo allora con  $(Q^N, +, \cdot, 0, 1)$  la potenza diretta di  $Q$  con insieme di indici  $N$ , cioè la struttura il cui sostegno è l'insieme  $Q^N$  delle successioni di numeri razionali ed in cui le operazioni sono definite ponendo

$$\langle a_n \rangle + \langle b_n \rangle = \langle a_n + b_n \rangle \quad ; \quad \langle a_n \rangle \cdot \langle b_n \rangle = \langle a_n \cdot b_n \rangle$$

ed in cui  $0$  denota la successione  $\langle z_n \rangle$  con  $z_n$  costantemente uguale a  $0$  ed  $1$  denota la successione  $\langle u_n \rangle$  con  $u_n$  costantemente uguale ad uno.

**Proposizione 3.** La struttura  $(Q^N, +, \cdot, 0, 1)$  è un anello unitario che non è un campo.

*Dim.* Osserviamo che gli assiomi che caratterizzano l'essere un anello unitario sono tutti espressi tramite equazioni. D'altra parte se una equazione vale per una famiglia di strutture allora vale anche per il prodotto diretto di questa famiglia. Pertanto che  $Q^N$  sia un anello unitario segue dalle proprietà generali delle teorie equazionali. Ad esempio, per provare la proprietà commutativa della somma, che si esprime con una equazione del tipo  $x+y = y+x$ , osserviamo che

$$\langle a_n \rangle + \langle b_n \rangle = \langle a_n + b_n \rangle = \langle b_n + a_n \rangle = \langle b_n \rangle + \langle a_n \rangle.$$

Per provare che  $0 = \langle z_n \rangle$  è l'elemento neutro, fatto che si esprime tramite l'equazione  $x+0 = x$ , osserviamo che

$$\langle a_n \rangle + \langle z_n \rangle = \langle a_n + z_n \rangle = \langle a_n \rangle.$$

Per provare che  $Q^N$  non è un campo mostriamo che ammette divisori dello zero<sup>6</sup>. Infatti se si considerano le due successioni  $\langle a_n \rangle$  e  $\langle b_n \rangle$  definite dall'essere

$a_n = 1/n$  se  $n$  è pari e  $a_n = 0$  se  $n$  è dispari

$b_n = 0$  se  $n$  è pari e  $b_n = 1/n$  se  $n$  è dispari,

allora  $\langle a_n \rangle \cdot \langle b_n \rangle$  è la successione costantemente uguale a zero, cioè che  $\langle a_n \rangle \cdot \langle b_n \rangle = 0$  mentre  $\langle a_n \rangle \neq 0$  e  $\langle b_n \rangle \neq 0$ .

Per potere ottenere un campo ci riferiamo ad una sottostruttura di  $(Q^N, +, \cdot, 0, 1)$

**Definizione 4.** Chiamiamo *successione di Cauchy* un elemento  $(r_n)_{n \in N}$  in  $Q^N$  tale che:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m \forall p \geq m \forall q \geq m |r_p - r_q| \leq \varepsilon.$$

Indichiamo con  $Ch$  l'insieme delle successioni di Cauchy.

**Proposizione 5.** L'insieme  $Ch$  delle successioni di Cauchy è un sottoanello di  $(Q^N, +, \cdot, 0, 1)$ . Tale anello ammette divisori dello zero e quindi non è un campo.

*Dim.* Poiché si dimostra che la somma ed il prodotto di due successioni di Cauchy è una successione di Cauchy,  $Ch$  è una parte stabile di  $Q^N$  e quindi è ancora un anello unitario. La coppia di divisori dello zero mostrata nella proposizione precedente è costituita da elementi di  $Ch$  e quindi tale anello ammette divisori dello zero.

<sup>6</sup> Il fatto che  $(Q^N, +, \cdot, 0, 1)$  non sia un campo non deve stupire in quanto, come si dimostra in teoria dei modelli, la nozione di campo non si conserva per prodotti diretti.

**Definizione 6.** Diciamo che due successioni di Cauchy  $\langle a_n \rangle$  e  $\langle b_n \rangle$  sono *equi-convergenti* e poniamo  $\langle a_n \rangle \equiv \langle b_n \rangle$  se  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - b_n| = 0$  cioè se  $\forall \varepsilon > 0 \exists m \forall p \geq m |a_p - b_p| \leq \varepsilon$ .

Vale il seguente teorema di cui omettiamo la dimostrazione.

**Teorema 7.** La relazione di equi-convergenza  $\equiv$  è una congruenza nell'anello  $(Ch, +, \cdot, 0, 1)$ . Il quoziente di  $(Ch, +, \cdot, 0, 1)$  modulo  $\equiv$  è un campo.

Da notare che invece che alla nozione di equiconvergenza possiamo anche riferirci alla teoria degli ideali in un anello. Infatti se indichiamo con  $I$  l'insieme delle successioni di Cauchy  $\langle a_n \rangle$  tali che  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$  cioè tali che  $\forall \varepsilon > 0 \exists m \forall p \geq m |a_p| \leq \varepsilon$ . Allora  $I$  costituisce un ideale. Inoltre due successioni  $\langle a_n \rangle$  e  $\langle b_n \rangle$  sono equiconvergenti se e solo se la loro differenza appartiene ad  $I$ .

**Definizione 8.** Chiamiamo *campo dei numeri reali* il quoziente di  $(Ch, +, \cdot, 0, 1)$  modulo  $\equiv$ , equivalentemente, modulo l'ideale massimale  $I$ .<sup>7</sup>

### 11. Una soluzione diversa: i razionali non-standard

Esiste un altro modo di procedere per definire una struttura algebrica che pur contenendo, in un certo senso, il campo dei numeri reali ha anche numeri "infinitesimi" e numeri "infiniti" ed è quindi molto più ricca. Partiamo ancora una volta dall'anello  $(\mathcal{Q}^N, +, \cdot, 0, 1)$  delle successioni di razionali. Tuttavia questa volta:

1. non ci limitiamo alle successioni di Cauchy considerando la classe di tutte le successioni
2. introduciamo una relazione di congruenza diversa dalla equi-convergenza.

L'idea è che si possono identificare due successioni che sono uguali in un insieme che ci sembra "sufficiente". Ad esempio in matematica esistono due nozioni di "quasi ovunque" che sembrano adeguate. Infatti diciamo che una proprietà  $P$  vale quasi ovunque quando:

- "è sufficiente che  $P$  valga ovunque tranne che per un insieme finito di elementi"

oppure

- "è sufficiente che  $P$  valga ovunque tranne che per un insieme di elementi di misura nulla".

Se indichiamo con  $U$  la classe degli insiemi co-finiti (cioè complementi di finiti), allora nel primo caso possiamo dire che  $P$  vale quasi-ovunque se l'insieme degli elementi in cui  $P$  vale appartiene ad  $U$ . Similmente se  $U$  denota la classe degli insiemi che sono complementi di insiemi di misura nulla, allora nel secondo caso possiamo dire che l'insieme degli elementi in cui vale  $P$  appartiene ad  $U$ . In entrambi i casi la classe  $U$  soddisfa le seguenti proprietà.

i)  $X \in U$  e  $Y \in U \Rightarrow X \cap Y \in U$

ii)  $X \in U$  e  $Y \supseteq X \Rightarrow Y \in U$ .

Vogliamo ora estendere le due nozioni proposte di "quasi ovunque" nel modo più generale possibile.

**Definizione 1.** Dato un insieme  $S$  chiamiamo *filtro* una classe  $U$  non vuota di sottoinsiemi di  $S$  tale che

i)  $X \in U$  e  $Y \in U \Rightarrow X \cap Y \in U$

ii)  $X \in U$  e  $Y \supseteq X \Rightarrow Y \in U$

Diciamo che una proprietà  $P$  vale *quasi-ovunque* in  $S$  rispetto al filtro  $U$  se  $\{x \in S : x \text{ soddisfa } P\} \in U$ .

**Esercizio.** Fissato un sottoinsieme  $A$  di  $S$  provare che la classe  $U = \{X \in P(S) : X \supseteq A\}$  degli insiemi che contengono  $A$  è un filtro (tale tipo di filtro viene detto *principale*). In tale caso una proprietà vale quasi ovunque se vale almeno per tutti gli elementi di  $A$ . In un certo senso questo vuol dire che si considerano importanti solo gli elementi di  $A$  e trascurabili gli altri. Pertanto "vero quasi ovunque" significa "vero per tutti gli elementi importanti".

**Esercizio.** Provare che la classe degli intorni di un punto costituisce un filtro.

<sup>7</sup> La tecnica con cui abbiamo costruito il campo dei numeri reali è la stessa con cui si costruisce il completamento di uno spazio metrico in topologia.

**Definizione 2.** Detto  $U$  un filtro, nell'insieme  $Q^N$  definiamo la relazione binaria  $\equiv$  ponendo

$$\langle a_n \rangle \equiv \langle b_n \rangle \Leftrightarrow a_n = b_n \text{ quasi ovunque.}$$

In altre parole poniamo  $\langle a_n \rangle \equiv \langle b_n \rangle$  se e solo se  $\{n \in N : a_n = b_n\} \in U$ .

**Teorema 3.** La relazione  $\equiv$  è una congruenza nella struttura  $(Q^N, +, \cdot, 0, 1)$ . Il relativo quoziente  $(Q^N/\equiv, +, \cdot, 0, 1)$  è un anello.

*Dim.* La proprietà riflessiva e simmetrica vengono “ereditate” dalle corrispondenti proprietà dell’uguaglianza. Infatti, poiché  $N \in U$  risulta che  $\{n \in N : a_n = a_n\} = N \in U$  e quindi  $\langle a_n \rangle \equiv \langle a_n \rangle$ . Poiché  $\{n \in N : a_n = b_n\} = \{n \in N : b_n = a_n\}$  vale la proprietà simmetrica. Per provare la proprietà transitiva, supponiamo che  $\langle a_n \rangle \equiv \langle b_n \rangle$  e  $\langle b_n \rangle \equiv \langle c_n \rangle$ , cioè che  $\{n \in N : a_n = b_n\} \in U$  e  $\{n \in N : b_n = c_n\} \in U$ . In tale caso, poiché

$$\{n \in N : a_n = c_n\} \supseteq \{n \in N : a_n = b_n\} \cap \{n \in N : b_n = c_n\}$$

possiamo asserire che  $\{n \in N : a_n = c_n\} \in U$  e quindi che  $\langle a_n \rangle \equiv \langle c_n \rangle$ .

Per provare che  $\equiv$  è una congruenza, supponiamo che  $\langle a_n \rangle \equiv \langle a'_n \rangle$  e  $\langle b_n \rangle \equiv \langle b'_n \rangle$ , cioè che  $\{n \in N : a_n = a'_n\} \in U$  e  $\{n \in N : b_n = b'_n\} \in U$ . In tale caso, poiché

$$\{n \in N : a_n + b_n = a'_n + b'_n\} \supseteq \{n \in N : a_n = a'_n\} \cap \{n \in N : b_n = b'_n\}$$

possiamo concludere che  $\langle a_n \rangle + \langle b_n \rangle \equiv \langle a'_n \rangle + \langle b'_n \rangle$ . Esattamente nello stesso modo è possibile provare che  $\equiv$  è compatibile con il prodotto.

Infine il fatto che il quoziente  $(Q^N/\equiv, +, \cdot, 0, 1)$  sia un anello deriva dal fatto che il passaggio a quoziente di una struttura conserva tutte le proprietà che si possono esprimere tramite equazioni. Poiché gli assiomi di anello sono espresse tutte tramite equazioni, il quoziente di un anello è ancora un anello.

In generale non è detto che  $(Q^N/\equiv, +, \cdot, 0, 1)$  sia un campo. Ad esempio consideriamo il filtro dei cofiniti e le due successioni  $\langle a_n \rangle$  e  $\langle b_n \rangle$  definite dall’essere

$$a_n = 1/n \text{ se } n \text{ è pari e } a_n = 0 \text{ se } n \text{ è dispari}$$

$$b_n = 0 \text{ se } n \text{ è pari e } b_n = 1/n \text{ se } n \text{ è dispari,}$$

Allora  $[\langle a_n \rangle] \cdot [\langle b_n \rangle] = [\langle a_n \rangle \cdot \langle b_n \rangle] = [\langle a_n \cdot b_n \rangle] = [0]$  con  $[\langle a_n \rangle] \neq [0]$  e  $[\langle b_n \rangle] \neq [0]$ .

Per evitare un tale problema dobbiamo considerare un filtro che contenga o l’insieme dei numeri pari o l’insieme dei numeri dispari in modo che risulti che o  $[\langle a_n \rangle] = [0]$  oppure  $[\langle b_n \rangle] \neq [0]$ . Più in generale, poiché possiamo definire due successioni analoghe per ogni sottoinsieme  $X$  di  $N$  ponendo

$$a_n = 1/n \text{ se } n \in X \text{ e } a_n = 0 \text{ se } n \notin X$$

$$b_n = 0 \text{ se } n \notin X \text{ e } b_n = 1/n \text{ se } n \in X,$$

è evidente che per evitare che ci siano divisori dello zero dobbiamo supporre che per ogni sottoinsieme  $X$  risulti  $X \in U$  oppure  $-X \in U$ . Ciò conduce alla seguente definizione.

**Definizione 4** Diciamo che un filtro proprio  $U$  è un *ultrafiltro* se per ogni sottoinsieme  $X$

iii) o  $X \in U$  oppure  $-X \in U$ .

Esempi banali di ultrafiltro sono gli ultrafiltri principali generati da un singoletto che si ottengono cioè prendendo un elemento  $x$  in  $S$  e poi considerando la classe  $U_x = \{X \in P(S) : x \in X\}$ . Non è facile dare esempi intuitivi di ultrafiltri che non siano principali. Infatti la dimostrazione della loro esistenza viene effettuata mediante l’assioma della scelta e non tramite l’esplicita esibizione di un esempio. Enunciamo solo il teorema che esprime una tale esistenza.

**Teorema 5.** Esiste un ultrafiltro che estende il filtro dei cofiniti e tale ultrafiltro non è principale.

**Teorema 6.** Se  $U$  è un ultrafiltro allora il quoziente di  $(Q^N, +, \cdot, 0, 1)$  modulo  $\equiv$  è un campo che denotiamo con  $Q^*$ .

*Dim.* Per provare che  $Q^*$  è un campo supponiamo che  $[\langle a_n \rangle]$  sia un elemento di  $Q^*$  diverso da zero. Allora, poiché lo zero di  $Q^*$  è la classe determinata dalla successione costantemente uguale a zero,

sappiamo che  $\{n \in \mathbb{N} : a_n = 0\} \notin U$ . Poiché per ipotesi  $U$  è un ultrafiltro, ciò comporta che  $\{n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0\} \in U$ . Definiamo la successione  $\langle b_n \rangle$  ponendo  $b_n = 1/a_n$  se  $a_n \neq 0$  e  $b_n = 1$  altrimenti. Allora, poiché  $\{n \in \mathbb{N} : a_n \cdot b_n = 1\} \supseteq \{n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0\} \in U$ , risulta che  $\{n \in \mathbb{N} : a_n \cdot b_n = 1\} \in U$  e quindi che  $[\langle a_n \rangle] \cdot [\langle b_n \rangle] = [\langle a_n b_n \rangle] = [1]$ . Ciò prova che  $[\langle a_n \rangle]$  è invertibile.

**Definizione 7.** Supponiamo che  $U$  sia un ultrafiltro non principale, allora il campo  $Q^*$  prende il nome di *campo dei numeri razionali non standard*.

Sia il campo dei razionali che quello dei reali risultano essere un *campo ordinato*, cioè un campo in cui esiste una relazione d'ordine  $\leq$  compatibile con le operazioni di somma e prodotto. Possiamo anche in  $Q^*$  definire una relazione d'ordine trasmettendo la relazione di ordinamento tra successioni definita in  $Q^N$  al quoziente  $Q^*$ . Purtroppo mentre sappiamo bene che cosa è una congruenza e come effettuare il quoziente per una struttura algebrica è alquanto problematico definire che cosa si debba intendere per congruenza e per quoziente quando abbiamo a che fare con una relazione d'ordine. Un modo semplice è tuttavia quello di ricondurre la nozione di ordine ad una operazione come avviene in teoria dei reticoli (si veda l'ultimo capitolo). Infatti in un reticolo viene definita una relazione d'ordine ponendo  $x \leq y$  se e solo se  $x \wedge y = x$ . Allora consideriamo  $Q$  come reticolo rispetto le operazioni *max* e *min*. Tali operazioni possono poi essere estese al prodotto diretto  $Q^N$  ottenendo un reticolo  $(Q^N, \min, \max)$ . Infine vale la seguente proposizione.

**Proposizione 8.** Dato un ultrafiltro, la relativa relazione di equivalenza  $\equiv$  è una congruenza nel reticolo  $(Q^N, \min, \max)$  ed il quoziente  $(Q^N/\equiv, \min, \max)$  di tale reticolo è ancora un reticolo. Pertanto è definita in  $Q^N/\equiv$  una relazione d'ordine  $\leq$  ponendo  $[\langle a_n \rangle] \leq [\langle b_n \rangle]$  se e solo se  $[\langle a_n \rangle] \wedge [\langle b_n \rangle] = [\langle a_n \rangle]$ . Tale relazione d'ordine può essere definita anche ponendo:

$$[\langle a_n \rangle] \leq [\langle b_n \rangle] \Leftrightarrow a_n \leq b_n \text{ quasi ovunque.}$$

*Dim.* La prima parte della proposizione si prova come nella dimostrazione del Teorema 3. D'altra parte

$$[\langle a_n \rangle] \leq [\langle b_n \rangle] \Leftrightarrow \min\{a_n, b_n\} = a_n \text{ quasi ovunque} \Leftrightarrow a_n \leq b_n \text{ quasi ovunque.}$$

Una aspetto particolarmente interessante di un campo dei razionali non standard è che non è archimedeo.

**Teorema 9.** Se l'ultrafiltro  $U$  contiene il filtro dei cofiniti allora il corrispondente campo  $Q^*$  dei numeri razionali non standard è un campo ordinato non archimedeo che estende il campo dei numeri razionali.

*Dim.* Consideriamo la successione  $n^2$  ed il corrispondente numero iperreale  $[\langle n^2 \rangle]$ . Allora preso un qualunque intero  $p$  risulta che  $\{n \in \mathbb{N} : n^2 < p\}$  è finito e quindi che  $\{n \in \mathbb{N} : n^2 \geq p\}$  è cofinito. Poiché abbiamo supposto che  $U$  contiene tutti i cofiniti, tale insieme appartiene ad  $U$ . Questo prova che il numero iperreale  $[\langle n^2 \rangle] \geq p \cdot [1] = [p]$  qualunque sia  $p$ .

**Nota: L'analisi non standard.** Il campo dei razionali non standard non fornisce in maniera diretta il campo dei reali che noi vorremmo costruire. Definisce tuttavia qualcosa che in un certo senso equivale al campo dei reali. Infatti, dato un numero reale  $r$  sia  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di Cauchy rappresentante  $r$ . Allora a tale successione possiamo associare il razionale non standard  $[(a_n)_{n \in \mathbb{N}}]$  che, in un certo senso, rappresenta  $r$ . Per meglio dire,  $[(a_n)_{n \in \mathbb{N}}]$  è un razionale non standard che è *infinitamente vicino* ad  $r$  dove è possibile dare una definizione rigorosa di tale espressione. La questione è complicata e non viene affrontata in questo paragrafo che ha come unico scopo quello di fare intravedere un universo nuovo ed interessante che è quello dell'*analisi non standard*.

Il campo dei numeri reali non standard viene definito esattamente con la stessa tecnica con cui abbiamo ottenuta la struttura  $Q^N/\equiv$  ma partendo dalle successioni di numeri reali e non dalle successioni di razionali.

In altre parole vale il seguente teorema.

**Teorema 9.** Sia  $U$  un ultrafiltro che contiene il filtro dei cofiniti e definiamo in  $R^N$  la relazione  $\equiv$  ponendo

$$\langle a_n \rangle \equiv \langle b_n \rangle \Leftrightarrow \{n \in N : a_n = b_n\} \in U.$$

Allora  $\equiv$  è una congruenza nella struttura  $(R^N, +, \cdot, 0, 1)$ . Il relativo quoziente  $(Q^{N/\equiv}, +, \cdot, 0, 1)$  è un campo che prende il nome di *campo dei numeri reali non-standard*. Tale campo è ordinato rispetto alla relazione  $\leq$  definita ponendo

$$[\langle a_n \rangle] \leq [\langle b_n \rangle] \Leftrightarrow a_n \leq b_n \text{ quasi ovunque.}$$

La presenza di infiniti ed infinitesimi permette, per fare un esempio, di definire il limite di una funzione  $f(x)$  per  $x$  che tende all'infinito direttamente come il valore di  $f$  in un numero infinito. Un integrale indefinito è effettivamente una sorta di somma infinitaria. La derivata è il rapporto tra due infinitesimi e così via. Ciò spesso fornisce metodi eleganti e naturali per dimostrare teoremi in analisi matematica. Un tale modo “*algebrico*” di trattare l'analisi prende il nome di *Analisi non standard*.



“... di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi ...’ A poco a poco la sua voce si smorzò, l’ultimo fievole *di miliardi* gli uscì dalle labbra come un sospiro, indi si abbattè sfinito sulla sedia. Gli spettatori in piedi lo acclamavano freneticamente. Il principe Ottone gli si avvicinò e stava per appuntargli una medaglia sul petto quando Gianni Binacchi urlò:

"Più uno!"

La folla precipitatosi nell’emiciclo portò in trionfo Gianni Binacchi. Quando tornammo a casa, mia madre ci aspettava ansiosa alla porta. Pioveva. Il babbo, appena sceso dalla diligenza, le si gettò tra le braccia singhiozzando: "Se avessi detto più due avrei vinto io."