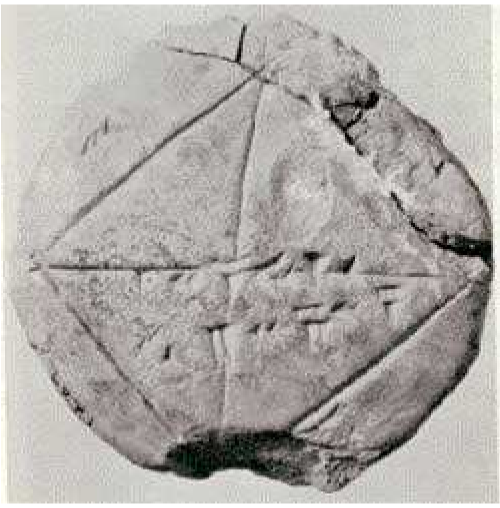
FONDAMENTI DELLA MATEMATICA

(Modulo di Matematiche Complementari)

Giangiacomo Gerla



Nota: Questi appunti sono in via di compilazione e ben lontani dall'essere completi. Chi trovasse errori o incongruenze (cosa probabile) è pregato di comunicarmelo: gerla@libero.it)

INDICE

CAPITOLO 4
METODO ASSIOMATICO E STRUTTURALISMO

1. Paradossi e crisi della teoria degli insiemi
2. Due modi di affrontare i paradossi: intuizionismo e metodo assiomatico
3. Un approccio assiomatico alla geometria
4. Un approccio assiomatico ai numeri reali
5. Sistemi di assiomi per la teoria degli insiemi
6. Due assiomi particolari: l'assioma della scelta e l'ipotesi del continuo
7. *Lo strutturalismo
8. *Categoricità, indipendenza, consistenza
9. *Due modi di concepire il metodo assiomatico: fondazionale e strutturalista
10. *Strutturalismo e divisione del lavoro

APPENDICE: Assioma della scelta ed un modello matematico del miracolo dei pani e dei pesci.

CAPITOLO 5
LA MATEMATICA COME SISTEMA FORMALE

1. Hilbert contro l'infinito: la matematica come calcolo di simboli
2. La logica matematica: il linguaggio
3. L'apparato deduttivo: una macchina per produrre teoremi
4. Teoremi limitativi
5. La matematica come sistema di riscrittura (*Matematica*, *Derive*)

Letture: Giorello, Odifreddi, *Sul teorema di Gödel*, colloquio televisivo.

APPENDICE
NOZIONI BASE E VARIE

1. Funzioni e relazioni di equivalenza
2. Perché la definizione di coppia è così brutta
3. Relazioni d'ordine e reticoli
4. Trasformare una relazione in una relazione di pre-ordine o di equivalenza
5. Teoremi di punto fisso in insiemi ordinati

Bibliografia

INTRODUZIONE.

In generale siamo tanto abituati a manipolare i concetti matematici fondamentali di *punto*, *retta*, *numero* che tendiamo a confondere la familiarità che abbiamo acquisito con la conoscenza di tali concetti. Un po' avviene come per il nostro giornalaio o salumiere che pensiamo di conoscere solo perché sono venti anni che facciamo acquisti da loro (ma poi non sappiamo nemmeno dove abitano o se sono sposati o no). Proviamo però ad essere meno superficiali ed a porci domande del tipo:
- che cosa sono i numeri?
- che cosa è un punto, una retta?
- i numeri, i punti le rette sono invenzioni dell'uomo, di un dio oppure esistono in natura?
- che cosa è la matematica?
- i risultati della matematica sono sicuri? e, se sono sicuri, perché lo sono?
- esiste l'infinito di cui spesso parla la matematica ?
- perché la matematica che non sembra avere a che fare con l'esperienza è utile per le scienze empiriche?

Ci accorgiamo allora che non è facile dare risposte. Di fatto risulta che persone diverse (specialmente se non appartenenti alla stessa epoca) hanno dato e danno risposte diverse. Questo fatto si esprime dicendo che:

<u>sono esistite ed esistono diverse *"filosofie"* della matematica.</u>

A tali diverse visioni della matematica hanno corrisposto diverse fondazioni dove, quando si parla di "fondazione della matematica" si intende un tentativo di ricondurre (fondare su) tutti i concetti matematici a principi unici, ad una unica serie di concetti-base che per qualche motivo si ritengono più intuitivi, più affidabili o più rigorosi. Il volere ricondurre tutto alla teoria degli insiemi, al metodo assiomatico, alla logica matematica sono tre esempi di proposte attuali di fondare la matematica.

In questo corso ci occuperemo appunto di filosofia della matematica assumendo un punto di vista storico.

Salerno 2003

CRONOLOGIA

-50.000 Traccia di conteggi da parte dell'uomo di Neanderthal

-25.000 Disegni geometrici primitivi da parte dell'uomo di Cro-Magnon

-15.000 Nell'attuale Libano, si sono trovate ossa di animali, risalenti a questo periodo, che mostrano intaccature riunite in gruppi di eguale cardinalità.

-4241 Presunta origine del calendario egiziano

-3000 Numeri geroglifici in Egitto

-1850 Papiro di Mosca: notazione posizionale in Mesopotamia

-1700 Papiro di Rhind: rotolo lungo cinque metri, composto da quattordici fogli di papiro, contiene decine di problemi matematici di vario tipo.

In Egitto e in Mesopotamia si conoscono il numero π, le quattro operazioni, le equazioni quadratiche, il calcolo dell'area di quasi tutte le figure piane.
Tebe e Babilonia sono i principali centri di studio della matematica.
La maggior parte dei problemi sono di natura economica.

-600 Il greco **Talete** (624-546 circa) è considerato il fondatore della geometria. Sebbene non abbiamo nessun documento certo, gli vengono attribuiti i teoremi sulla similitudine dei triangoli, in particolare quello che porta il suo nome.

-500 Il greco **Pitagora** (580-497 circa) è il fondatore di una scuola matematica, filosofica e religiosa con sede a Crotone. La base delle conoscenze per la scuola Pitagorica è il numero naturale. Gli si attribuisce il famoso teorema sui triangoli rettangoli che porta il suo nome.

Il greco **Ippocrate** (460-377) scrive il primo trattato di geometria. **Zenone** enuncia i famosi paradossi.

-400 **Platone** (*429-347 a.C.*) elabora la sua famosa teoria delle idee che influenzerà molto i matematici greci.

I Greci raccolgono l'eredità dei babilonesi ed egiziani e trasformano una collezione di risultati empirici in una scienza organica. I due principali processi della organizzazione logica della matematica sono l'astrazione (trarre un'idea generale dalla percezione di cose diverse) e la deduzione (giungere da certe premesse a una conclusione in modo che non si possano trovare errori in alcuna parte dell'argomentazione).

-300 **Aristotele** (384-322) studia le leggi del ragionamento logico ed elabora la sua teoria dei sillogismi.
Euclide organizza negli *Elementi* i teoremi di geometria e di teoria dei numeri ottenuti dalla cultura matematica greca dell'epoca. Procede per definizioni, postulati e teoremi con una esposizione che è rimasta classica per ogni tempo.

-200 **Archimede** di Siracusa (287-212) si occupa di aritmetica, algebra, geometria, fisica; risolve importanti problemi sulle equazioni cubiche; anticipa il calcolo logaritmico e il calcolo integrale.
Ipparco (190-125) fonda la trigonometria piana e sferica.
Apollonio studia le coniche.
Eratostene effettua la prima misurazione del diametro della Terra.

-100 **Erone** compie importanti studi di geometria e di fisica

100 **Tolomeo** nell'*Almagesto* tratta problemi di trigonometria piana e sferica.

200 **Diofanto** studia l'aritmetica, usa i simboli algebrici ed enuncia le regole per risolvere le equazioni di primo e secondo grado

La matematica greca raggiunge il massimo sviluppo. Il centro della cultura matematica si sposta da Atene ad Alessandria d'Egitto.

500 Il latino **Boezio** compie ricerche di logica e geometria.

600 Gli Indiani usano la notazione posizionale e i numeri indù.
I Cinesi introducono l'estrazione di radice quadrata.

800 Gli Arabi diffondono la numerazione posizionale indiana, detta poi arabica. L'arabo **al-Khuwarizmi** compone il trattato Al-giabr wa'l mu kabala, da cui deriva il nome algebra. Dal nome di questo matematico deriva il nome algoritmo.

Il centro della cultura matematica passa da Alessandria a a Baghdad, capitale dell'Islam. L'arabo diviene linguaggio scientifico internazionale. Gli arabi traducono i principali testi della matematica greca, creano nuovi settori di ricerca e mettono in contatto la matematica occidentale con quella indiana.

1000	L'indiano **Sridhara** dà una chiara esposizione dell'uso del numero 0, affermando che a+0=a, a-0=a, a·0=0, 0·a=0.	
1200	L'italiano **Fibonacci** di Pisa (1175-1240) nel trattato *Liber Abaci* introduce in Europa il sistema di numerazione arabo, nonché i risultati algebrici della cultura musulmana.	Il commercio, che le repubbliche italiane avviano con i paesi del mondo arabo, avvia il ritorno degli studi di matematica nel mondo occidentale. Si sviluppa la scuola italiana di algebra elementare che ha come obiettivo principale la risoluzione delle equazioni algebriche di terzo e quarto grado.
1500	L'italiano **Luca Pacioli** (1445-1510) scrive il primo trattato generale di aritmetica e algebra, *Summa,* con un accenno al calcolo delle probabilità e a logaritmi. **Gerolamo Cardano** tratta le cosiddette grandezze immaginarie. Niccolò Fontana detto **Tartaglia** espone la regola per la risoluzione delle equazioni di terzo grado ridotte. Il francese **Viète** introduce l'algebra simbolica, che permette di scrivere lunghe espressioni algebriche, secondo il metodo moderno.	
1600	**Fermat** coglie i principi essenziali della geometria analitica. **Cavalieri** studia il calcolo infinitesimale. Nel 1636 **Descartes** pubblica il *Discours de la méthode* che contiene i fondamenti della geometria analitica. **Pascal** dà le basi della geometria proiettiva e del calcolo delle probabilità. **Newton** crea il calcolo delle flussioni, poi detto calcolo infinitesimale. **Leibniz** crea, indipendentemente da Newton, e con un simbolismo uguale a quello attuale il calcolo differenziale visto come calcolo degli infinitesimi. Inoltre pone in modo esplicito alcune idee base della moderna logica matematica	Si sviluppano due nuovi rami della matematica: la geometria analitica e l'analisi infinitesimale
1700	**Eulero** introduce il calcolo delle variazioni, applicando i metodi del calcolo differenziale alle curve e alle superfici. I **Bernoulli e Lagrange** sviluppano la teoria delle equazioni integrali e differenziali applicandola alla geometria e alla meccanica	Gli studi di matematica si concentrano sullo sviluppo dell'analisi. Gli oggetti principali dello studio della matematica divengono le funzioni.
1800	**Gauss** dimostra il teorema fondamentale dell'algebra: ogni equazione ha tante radici quanto è il suo grado. Nel campo della geometria introduce lo studio della curvatura delle superfici e mette in crisi la geometria euclidea. **Laplace** introduce in modo rigoroso la teoria della probabilità. **Cauchy** e **Weierstrass** rendono rigoroso il calcolo infinitesimale. **Lobacevskij e Bolyai,** indipendentemente l'uno dall'altro, studiano una geometria che contraddice il postulato di Euclide sulle parallele. **Riemann** fonda le geometrie euclidee e non sul concetto di metrica. **Boole** applica il calcolo algebrico alla logica. **Cantor** formula la teoria degli insiemi. **Klein** dà un quadro completo, attraverso la teoria dei gruppi di trasformazioni delle varie geometrie sorte nell'Ottocento: proiettiva, metrica, euclidea, ellititica, iperbolica, topologia. **Frege** si propone di unificare logica e aritmetica. **Peano** costruisce una simbologia per il calcolo logico e per le dimostrazioni matematiche. **Enriquez** organizza in modo rigoroso la geometria proiettiva.	I principali filoni di ricerca di questo secolo sono la teoria delle funzioni di variabile immaginaria, la geometria proiettiva, le geometrie non euclidee, la teoria dei gruppi. La teoria degli insiemi. Iniziano i primi studi di logica matematica
1900	**Hilbert** dà una formulazione puramente assiomatica della geometria. **Russell** trova la sua celebre antinomia. **Ricci-Curbastro** e **Levi-Civita** creano il calcolo differenziale assoluto, strumento utilizzato da **Einstein** per formulare la teoria della relatività. **Hilbert** propone la logica matematica come strumento fondazionale per giustificare l'edificio di Cantor. **Brouwer** in contrapposizione ritiene esclusivamente intuitivi i principi della matematica. **Volterra** fonda il calcolo funzionale. **Gödel** dimostra che ogni sistema formale abbastanza potente da contenere l'usuale aritmetica ha necessariamente proposizioni non dimostrabili e non confutabili. Ne consegue che l'aritmetica non può fondarsi su se stessa. **Wiener** introduce la cibernetica e la teoria dell'informazione. **Thom** intraprende lo studio delle catastrofi o del caos, ossia delle trasformazioni improvvise. **Mandelbrot** espone lo studio dei frattali, forme geometriche irregolari che appaiono simili se osservate su scale diverse.	Metodo assiomatico e Logica. I teoremi di Gödel