CAPITOLO 4

indice

IL CALCOLO PROPOSIZIONALE

1. Introduzione.

La logica matematica studia le "asserzioni", cioè le espressioni linguistiche per cui abbia senso dire se siano vere o false. Supponiamo che invece di dire che una asserzione è vera affermiamo che ha “valore di verità 1”, invece di dire che è falsa affermiamo che ha “valore di verità 0”. Allora il primo compito della logica matematica è stabilire come il valore di verità di una asserzione composta possa essere calcolato a partire dai valori di verità delle asserzioni che la compongono e quindi di dare un significato alla parola “essere vero”. Questa parte della logica viene chiamata *semantica*. Il secondo compito della logica è quello di formalizzare e riprodurre le forme di ragionamento dell'essere umano, cioè quei processi mentali che permettono di ottenere a partire da asserzioni considerate vere (premesse) nuove asserzioni (conclusioni). Questa parte della logica prende il nome di *teoria della dimostrazione.*

Il calcolo proposizionale studia un particolare insieme di espressioni del linguaggio scientifico, espressioni che vanno sotto il nome di *proposizioni* o *asserzioni*. Per proposizione intendiamo una qualunque espressione della lingua italiana di cui si possa dire che sia vera o falsa. Esempi di proposizione sono allora

"ieri sono andato a Roma", "2+3=7", "7 è primo ed è maggiore di 5", "7 non è primo", "347 o è pari oppure 347-1 è pari".

Non sono invece esempi di proposizione le espressioni "vai a Roma !" che esprime un comando ed è tipica dei linguaggi di programmazione dove sono presenti istruzioni del tipo "poni x uguale a 5", "vai all'istruzione con l'etichetta 5",

Non è una proposizione l'espressione "vai a Roma ? " che esprime una interrogazione ed è tipica dei linguaggi di interogazione dei dati. Ovviamente non è una proposizione l'espressione "se potessi andare a Roma!", che esprime un desiderio.

Nel seguito a volte invece di dire che una proposizione α è vera diremo che ha "valore di verità uguale ad 1", invece di dire che è falsa diremo che ha "valore di verità uguale a 0". Ora vi sono due tipi di proposizioni: quelle atomiche e quelle composte, cioè quelle che sono costruite a partire da altre proposizioni. Le proposizioni

"Mario ieri è andato a Roma", e *"2+3=7"*

sono esempi di proposizioni atomiche. La proposizione *"7 è primo **e** 7 è maggiore di 5"* è una proposizione che puo essere considerata composta (tramite congiunzione) dalla proposizione *"7 è primo"* e dalla proposizione *"7 è maggiore di 5"*. Se indichiamo con p_1 e p_2 rispettivamente *"7 è primo"* e *"7 è maggiore di 5"*, allora indicheremo con $p_1 \wedge p_2$ la proposizione composta. La proposizione *"347 o è pari oppure 347-1 è pari"* è ottenuta componendo (tramite disgiunzione) la proposizione *"347 è pari"* con la proposizione *"347-1 è pari"*. Se indichiamo con p_1 e p_2 le proposizioni componenti, possiamo indicare con $p_1 \vee p_2$ la proposizione composta. La proposizione *"se Mario ieri è andato a Roma allora Mario ieri non ha studiato"* è composta da *"Mario ieri è andato a Roma"* e *"Mario ieri non ha studiato"* (tramite implicazione). Una tale proposizione sarà indicata con espressioni del tipo $p_1 \rightarrow p_2$ se con p_1 si è indicato *"Mario ieri è andato a Roma"* e con p_2 *"Mario ieri ha studiato"*. La proposizione *"7 non è primo"* è considerata composta perchè ottenuta (tramite negazione) dalla proposizione *"7 è primo"*. Se indichiamo con p_1 la proposizione *"7 è primo"* allora indicheremo con $\neg p_1$ la proposizione *"7 non è primo"*.

Il primo compito del calcolo proposizionale è:

esaminare come conoscendo i valori di verità delle proposizioni atomiche componenti una proposizione si possa determinare il valore di verità di tale proposizione.

Quella parte della logica che si occupa di una tale questione prende il nome di *semantica*. Per renderci conto di come ciò sia possibile osserviamo che:
- la proposizione *"7 è primo e 7 è maggiore di 5"* è vera perché tutte e due le componenti sono vere;
- la proposizione *"o 347 è pari oppure 347+1 è pari"* è vera perchè una delle sue componenti è vera;
- se sappiamo che *"Mario ieri è andato a Roma"* è vero ma sappiamo anche che *"Mario ieri ha studiato"* è vera, allora la proposizione *"se Mario ieri è andato a Roma allora Mario ieri non ha studiato"* risulta falsa
- la proposizione *"7 non è primo"* è falsa perchè *"7 è primo"* è vera.

Si noti che non è invece compito del calcolo proposizionale (e più in generale della logica matematica) stabilire se e perchè le proposizioni atomiche sono vere o false. Ad esempio stabilire la verità o meno della proposizione atomica "Mario ieri è andato a Roma" o di "2+3=7".
Il secondo problema di cui si occupa il calcolo proposizionale è:
esaminare come dalla verità di alcune asserzioni (non necessariamente atomiche) sia possibile derivare la verità di altre asserzioni.
La parte della logica che si occupa di una tale questione prende il nome di *teoria della dimostrazione.* Ad esempio se si è assolutamente sicuri che
"se Mario ieri è andato a Roma allora Mario ieri non ha studiato" e si viene a sapere che è vero che *"Mario ieri è andato a Roma"* allora si puo concludere che *"Mario ieri non ha studiato"*.

2. Il linguaggio del calcolo proposizionale
Per definire il linguaggio del calcolo proposizionale consideriamo un alfabeto A costituito da:
- un insieme $Vp = \{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$ i cui elementi sono chiamati *variabili proposizionali*
- i simboli $\wedge$, $\vee$, $\neg$ chiamati rispettivamente *congiunzione*, *disgiunzione* e *negazione*
- i due simboli (e) chiamati *parentesi*.

I simboli $\wedge$, $\vee$, $\neg$ vengono anche chiamati *connettivi logici*.

Definizione 1. Il linguaggio Λ del calcolo proposizionale è il linguaggio prodotto dalla grammatica $G = (V,A,P, prop)$ in cui $V = \{prop\}$ e P è l'insieme delle produzioni:

$prop \to p_1$; $prop \to p_2$; . . . .
$prop \to (prop)\wedge(prop)$;
$prop \to (prop)\vee(prop)$;
$prop \to \neg(prop)$.

Chiamiamo *proposizioni* o anche *formule ben formate* o *formule* le parole in Λ.

Esempio. La parola $(\neg(p_4))\wedge(p_2)$ è una proposizione poiché si puo ottenere tramite la seguente derivazione

$$prop,\ (prop)\wedge(prop),\ (\neg(prop))\wedge(prop),\ (\neg(prop))\wedge(p_2),\ (\neg(p_4))\wedge(p_2).$$

Esercizio. Trovare una derivazione che permetta di derivare le proposizioni

$$\neg(\neg(p_2)),\ \neg((p_2)\vee(\neg(p_5))),\ (p_1\wedge p_2)\vee(\neg(p_2)).$$

Le variabili proposizionali vengono anche chiamate *proposizione atomiche* mentre le proposizioni che non sono atomiche vengono chiamate *composte*. Ad esempio p_2, p_4 e p_5 sono proposizioni atomiche mentre $\neg(p_4)$, $(p_4)\wedge(p_2)$ e $(p_4)\vee(p_2)$ sono proposizioni composte.
Come avviene nell'aritmetica, l'uso delle parentesi è necessario per evitare ambiguità di interpretazione. Ad esempio l'espressione $\neg p_1\wedge p_2$ potrebbe essere interpretata come $(\neg(p_1))\wedge(p_2)$ oppure con $\neg((p_1)\wedge(p_2))$. Tuttavia spesso si applicano alcune ovvie regole per ridurre il numero di parentesi quando il significato delle proposizioni risulti chiaro.

Nomenclatura. Alcune delle formule prendono nomi particolari. Ad esempio:
- chiamiamo *letterale positivo* ogni variabile proposizionale
- chiamiamo *letterale negativo* la negazione di variabile proposizionale,
- diremo che una formula è in *forma normale disgiuntiva* se è disgiunzione di formule ognuna delle quali è congiunzione di letterali.
- chiamiamo *clausola* ogni formula che sia disgiunzione di letterali.
- diciamo che una formula è in *forma normale congiuntiva* se è una congiunzione di clausole.

Esempi. Le formule p_1, p_3 sono letterali positivi, le formula $\neg p_1$, $\neg p_3$ sono letterali negativi. La formula $(p_1\wedge\neg p_4)\vee(p_3\wedge p_2)$ è in forma normale disgiuntiva mentre la formula $(\neg(p_1\wedge\neg p_2))\vee p_4$ non lo è. La formula $p_1\vee\neg p_4\vee p_3\vee\neg p_2$ è una clausola. La formula $(p_1\vee\neg p_4)\wedge(p_3\vee p_2)$ è in forma normale congiuntiva. La formula $(p_1\wedge\neg p_4)\vee(p_3\wedge p_2)$ è in forma normale disgiuntiva.

Nota: linguaggio e metalinguaggio. Quando parliamo di un linguaggio formale siamo costretti ad usare a nostra volta un linguaggio informale (ad esempio la lingua italiana utilizzata in questi appunti). Per evitare confusioni chiameremo *linguaggio oggetto* il linguaggio formale di cui vogliamo parlare e *metalinguaggio* il linguaggio utilizzato per parlarne. Un fenomeno simile avviene quando studiamo la lingua inglese (linguaggio oggetto) utilizzando la lingua italiana (metalinguaggio). Un insegnante di italiano usa un metalinguaggio (la lingua italiana) per studiare una lingua (ancora la lingua italiana). In questo caso linguaggio e metalinguaggio coincidono ed a volte si usano le virgolette per riferirsi al linguaggio oggetto. Ad esempio si scriverà la parola "italiano" è scritta in italiano.
La distinzione tra linguaggio e metalinguaggio è la base della distinzione fondamentale tra matematica e metamatematica. La metamatematica è la teoria matematica che ha come compito quello di studiare ... la matematica. Coincide con la logica matematica. Vediamo ad esempio tale distinzione in una lettera di Hilbert:

> (Da una lettera di Hilbert a Frege del 1923) *L'idea fondamentale della mia teoria della dimostrazione è la seguente: Tutto ciò che costituisce la matematica nel senso comunemente accettato del termine viene formalizzato rigorosamente, pertanto la matematica propriamente detta, o matematica nel senso più ristretto, diventa uno 'stock' di formule. . .*
> *Oltre alla matematica propriamente detta, formalizzata in questo modo, c'è, per così dire, una nuova matematica, una metamatematica, che serve a fondare la prima su basi sicure. In essa, in contrasto con i modi di inferenza puramente formali della matematica propriamente detta, ci si serve di tipi di inferenza che tengono conto dell'argomento su cui vertono, sebbene soltanto per stabilire la non-contraddittorietà degli assiomi. Nella metamatematica si opera con le dimostrazioni della matematica propriamente detta, che costituiscono esse stesse l'oggetto delle inferenze che tengono conto dell'argomento su cui vertono. In questo modo, lo sviluppo della scienza complessiva della matematica viene ottenuto mediante un continuo scambio, che è di due tipi: da una parte, l'acquisizione di nuove formule derivabili dagli assiomi mediante l'inferenza formale, dall'altra, l'aggiunta di nuovi assiomi parallelamente alla dimostrazione della loro non-contraddittorietà mediante inferenze che tengono conto dell'argomento su cui vertono.*
> *Gli assiomi e le proposizioni derivabili, cioè le formule, che nascono in questo processo di*

scambio sono rappresentazioni dei pensieri che costituiscono i procedimenti usuali della matematica quali sono stati finora concepiti, ma non sono essi stessi verità in senso assoluto. Sono piuttosto le informazioni fornite dalla mia teoria della dimostrazione riguardo alla derivabilità e alla non-contraddittorietà che devono essere considerate verità assolute.

3. La semantica del calcolo proposizionale

Come abbiamo gia detto, con il termine semantica si intende quella parte del calcolo proposizionale che si occupa di come una assegnazione di valori di verità alle formule atomiche determini una assegnazione di valori di verità alle formula composte. Le regole secondo cui ciò accade sono date dalla seguente definizione. Nel seguito ci riferiremo all'algebra di Boole $(\{0,1\}, min, max, \sim, 0,1)$
dove $\sim$ è definita ponendo $\sim(x) = 1-x$.

Definizione 1. Prende il nome di *valutazione delle variabili proposizionali* ogni funzione $v : Vp \to \{0,1\}$ cioè ogni funzione che assegna ad ogni variabile proposizionale un valore di verità. Chiamiamo *valutazione delle formule associata a v* l'estensione $v : \Lambda \to \{0,1\}$ di v ad Λ definita per ricorsione sulla complessità delle formule dalle seguenti equazioni

$$v((\alpha)\wedge(\beta)) = min\{v(\alpha),v(\beta)\} \ ; \ v((\alpha)\vee(\beta))=max\{v(\alpha),v(\beta)\} \ ; \ v(\neg(\alpha)) = \sim v(\alpha).$$

Ad esempio se v assegna a p_1 e p_2 rispettivamente i valori 0 ed 1, allora

$$v(p_1\wedge\neg p_2) = min\{v(p_1), v(\neg p_2)\} = min\{v(p_1), \sim v(p_2)\} = min\{0,0\} = 0.$$

$$v(p_2\vee(p_1\wedge\neg p_2)) = max\{v(p_2), v(p_1\wedge\neg p_2)\}= max\{1,0\} = 1.$$

In realtà per valutare una formula è sufficiente valutare solo le variabili proposizionali che compaiono nella formula. Pertanto se α è una qualunque formula e supponiamo che le variabili proposizionali di α siano tra $p_1,...,p_n$, allora ogni elemento di $\{0,1\}^n$, cioè ogni ennupla di valori di verità, si può interpretare come una distribuzione di valori di verità su tali variabili e quindi determina un valore di verità per α. In altre parole la formula α determina una funzione t_α di $\{0,1\}^n$ in $\{0,1\}$ che prende il nome di *tavola di verità* di α. Una definizione rigorosa di t_α può essere fatta per ricorsione sulla complessità di α.

Definizione 2. Per ogni formula α le cui variabili proposizionali sono comprese tra $p_1,...,p_n$ chiamiamo *tavola di verità* associata ad α la funzione $t_\alpha:\{0,1\}^n\to\{0,1\}$ definita per ricorsione sulla complessità di α tramite le equazioni

$$t_\alpha(x_1,...,x_n) = x_i \quad \text{se } \alpha = p_i$$

$$t_{\alpha\wedge\beta}(x_1,...,x_n) = min\{t_\alpha(x_1,...,x_n),t_\beta(x_1,...,x_n)\}$$

$$t_{\alpha\vee\beta}(x_1,...,x_n) = max\{t_\alpha(x_1,...,x_n),t_\beta(x_1,...,x_n)\}$$

$$t_{\neg\alpha}(x_1,...,x_n) = \sim t_\alpha(x_1,...,x_n).$$

Ad esempio se α è la formula $\neg(p_1\wedge\neg p_2)$ allora

$$t_{\neg(p1\wedge\neg p2)}(x_1,x_2) = 1\text{-}t_{p1\wedge\neg p2}(x_1,x_2) = 1\text{-}min\{t_{p1}(x_1,x_2),t_{\neg p2}(x_1,x_2)\}$$

$$= 1 - min\{x_1, t_{\neg p2}(x_1,x_2)\} = 1\text{-}min\{x_1,1-x_2)\}.$$

Una tavola di verità è una funzione il cui dominio è finito e quindi può essere rappresentata tramite una tabella in cui ogni riga è determinata da un elemento di $\{0,1\}^n$ e dalla relativa immagine. Le tavole di verità delle formula $p_1\wedge p_2$ e $p_1\vee p_2$ sono rappresentate da

p_1	p_2	$p_1 \wedge p_2$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

p_1	p_2	$p_1 \vee p_2$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Una tavola di verità per una formula più complessa, ad esempio $\neg(p_1 \vee \neg p_2)) \vee p_1$, si ottiene costruendo man mano le tavole di verità delle sue sottoformule al modo seguente:

p_1	P_2	$\neg p_2$	$p_1 \vee \neg p_2$	$\neg(p_1 \vee \neg p_2)$	$\neg(p_1 \vee \neg p_2) \vee p_1$
1	1	0	1	0	1
1	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0

Esercizio. Scrivere le tavole di verità delle formule $(\neg p_1 \wedge \neg p_2)$, $(\neg p_1 \wedge \neg p_2) \vee (p_1 \vee \neg p_3)$.

Implicazione ed equivalenza. Esistono altri due connettivi logici molto usati: l'*implicazione* $\rightarrow$ e l'*equivalenza logica* $\leftrightarrow$. A questi due connettivi vengono associate le seguenti tavole di verità.

p_1	p_2	$p_1 \rightarrow p_2$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

p_1	p_2	$p_1 \leftrightarrow p_2$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

La prima tavola di verità dice che esiste un solo caso in cui una implicazione può essere considerata falsa, quando l'antecedente p_1 è vero ed il conseguente p_2 è falso (seconda riga della tavola di verità). Per giustificare una tale scelta, consideriamo una frase del tipo
SE piove ALLORA la temperatura è bassa.
Se voglio confutare questa regola devo citare almeno un caso in cui pur piovendo (antecedente vero) è falso che la temperatura sia bassa (conseguente falso).

Pertanto esiste un solo modo per mostrare che una implicazione $p_1 \rightarrow p_2$ sia falsa: mostrando che p_1 è vera e p_2 è falsa.
E' da notare che, nonostante il fatto che si usi l'espressione "implica", affermare $\alpha \rightarrow \beta$ non significa volere indicare che esiste una qualche forma di ragionamento capace di dedurre β da α e non significa che esista un legame di significato tra α e β. Ad esempio la formula (2+2=4)$\rightarrow$(la neve è bianca) viene considerata vera, in quanto coincidente con ($\neg$(2+2=4))$\vee$(la neve è bianca). Ma anche la formula (2+2=5) $\rightarrow$ (la neve è bianca) è vera.
Infatti risulta vera ogni implicazione il cui antecedente sia falso[1].

---

[1] In proposito esiste il seguente aneddoto della cui autenticità non sono sicuro: Un tale chiese al famoso logico e filosofo Bertrand Russell : *E' vero che partendo da premesse false si può dimostrare qualunque cosa?*

Per quanto riguarda la seconda tavola di verità essa dice che una equivalenza è vera solo se le due asserzioni hanno lo stesso valore di verità.

Definizione 3. Due proposizioni α e β sono dette *logicamente equivalenti* se assumono gli stessi valori di verità per ogni assegnazione di valori di verità delle proposizioni componenti (cioè se determinano la stessa tavola di verità). In tale caso scriveremo $\alpha \equiv \beta$.

Sostanzialmente due formule logicamente equivalenti dicono la stessa cosa in modo diverso. Ad esempio le formule $p_1 \vee p_2$ e $p_2 \vee p_1$ pur essendo diverse (perché scritte diversamente), sono logicamente equivalenti. Osserviamo che la formula $\alpha \rightarrow \beta$ è logicamente equivalente alla formula $(\neg\alpha)\vee\beta$ e che $\alpha \leftrightarrow \beta$ è logicamente equivalente a $(\alpha \rightarrow \beta)\wedge(\beta \rightarrow \alpha)$ e quindi a $((-\alpha)\vee\beta)\wedge((-\beta)\vee\alpha)$. Ciò suggerisce che è possibile limitarsi ai soli connettivi $\wedge$, $\vee$, $\neg$ e considerare una espressione del tipo $\alpha \rightarrow \beta$ come un modo breve per indicare la formula $(\neg\alpha)\vee\beta$ e una espressione del tipo $\alpha \leftrightarrow \beta$ come un modo breve per indicare la formula $((-\alpha)\vee\beta)\wedge((-\beta)\vee\alpha)$. Questa scelta è preferibile visto i problemi di interpretazione che manifesta il connettivo $\rightarrow$. Se si procede in questo modo i simboli $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ non appartengono all'alfabeto del calcolo proposizionale (linguaggio oggetto) ma al nostro alfabeto (metalinguaggio) di cui ci serviamo per poter parlare di particolari formule. Due tautologie sono sempre logicamente equivalenti poiché hanno entrambe la tavola di verità costantemente uguale ad 1. Due contraddizioni sono logicamente equivalenti poiché hanno entrambe la tavola di verità costantemente uguale a 0.

Definizione 4. Una *tautologia* (una *contraddizione*) è una proposizione che risulta vera (rispettivamente falsa) qualunque siano i valori di verità delle proposizioni componenti.

E' facile verificare che la formula $p_1 \vee \neg p_1$ è una tautologia (questo fatto viene chiamato *principio del terzo escluso*). La formula $p_1 \wedge \neg p_1$ è una contraddizione (ciò viene chiamato *principio di non contraddizione*).

Problema. Dimostrare che:

- α è logicamente equivalente a β se e solo se $\alpha \leftrightarrow \beta$ è una tautologia.
- tutte le tautologie sono equivalenti tra loro
- tutte le contraddizioni sono equivalenti tra loro
- se α è una tautologia allora $\neg\alpha$ è una contraddizione e viceversa
- se α e β sono due tautologie allora $\alpha \wedge \beta$ è una tautologia,

---

E Russell rispose:
- *Certo!*
- *Lei sarebbe capace di dimostrare che se* 2 = 1 *allora lei è il Papa?*

Bertrand Russell ci pensò un po' su poi chiese:
- *Secondo lei, io ed il Papa quanti siamo?*
- *Due.*
- *Ma siccome* 2 = 1 *allora io e il Papa siamo* 1. *Perciò io sono il Papa !*

Sono possibili anche variazioni di questo tipo di ragionamento. Ad esempio se partiamo da una qualunque eguaglianza sbagliata, ad esempio $n = m$, con $(n \neq m)$, allora

$$n = m \Rightarrow n/(m-n) = m/(m-n) \Rightarrow n/(m-n) + 1 = m/(m-n) + 1 \Rightarrow 1 = m/(m-n) - n/(m-n) + 1$$
$$\Rightarrow 1 = 2 \Rightarrow \text{io sono il Papa.}$$

- se α è una tautologia e $\alpha\rightarrow\beta$ è una tautologia allora β è una tautologia.

Nota. Per come abbiamo data la definizione di tavola di verità associata ad una proposizione abbiamo che la formula $(p_3)\vee(p_2)$ determina una funzione (costante rispetto alla prima variabile) definita in $\{0,1\}^3$ anche se p_1 non compare esplicitamente. Una situazione simile si manifesta quando si definisce il concetto di polinomio e di funzione polinomiale associata ad un polinomio. Il polinomio $2\cdot(x_3)^4+5(x_2)^2+7$ ad esempio determina una funzione di R^3 in R anche se la variabile x_1 non compare esplicitamente. D'altra parte possiamo supporre che ad $2\cdot(x_3)^4+5(x_2)^2+7$ sia aggiunto il monomio $0\cdot x_1$. Nel caso della proposizione $(p_3)\vee(p_2)$ possiamo sempre supporre che sia presente il "monomio" $p_1\wedge\neg p_1$ e quindi sostituire ad essa la proposizione logicamente equivalente $((p_3)\vee(p_2))\vee(p_1\wedge\neg p_1)$. Per lo stesso motivo alla proposizione $(p_3)\vee(p_2)$ può essere associata anche una funzione di $\{0,1\}^4$ in $\{0,1\}$. Basta identificare tale proposizione con la formula $((p_3)\vee(p_2))\vee(p_1\wedge\neg p_1)\vee(p_4\wedge\neg p_4)$. Nel seguito quando dovremo descrivere una tavola di verità di una formula metteremo solo le colonne da cui dipendono effettivamente i valori della formula.

Esercizio. Dimostrare che $(\neg p_4)\wedge((p_4)\vee(p_2))$ è logicamente equivalente a $(\neg p_4)\wedge(p_2)$.
Esercizio. Le formule $(\neg p_4)\wedge(\neg p_5)$ e $(\neg p_1)\wedge(\neg p_2)$ sono logicamente equivalenti?

La seguente proposizione, la cui dimostrazione è lasciata per esercizio, elenca una serie di equivalenze logiche fondamentali.

Proposizione 5. Valgono le seguenti equivalenze logiche:
a) $\alpha\vee\beta\equiv\beta\vee\alpha$; $\alpha\wedge\beta\equiv\beta\wedge\alpha$ (proprietà commutativa)
b) $(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma\equiv\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)$; $(\alpha\vee\beta)\vee\gamma\equiv\alpha\vee(\beta\vee\gamma)$ (proprietà associativa di $\wedge$ e di $\vee$)
c) $\gamma\wedge(\alpha\vee\beta)\equiv(\gamma\wedge\alpha)\vee(\gamma\wedge\beta)$; $\gamma\vee(\alpha\wedge\beta)\equiv(\gamma\vee\alpha)\wedge(\gamma\vee\beta)$ (distributività)
d) $\alpha\vee\alpha\equiv\alpha$; $\alpha\wedge\alpha\equiv\alpha$ (idempotenza).
e) $\alpha\vee\neg\alpha$ è una tautologia (legge del terzo escluso)
f) $\alpha\wedge\neg\alpha$ è una contraddizione (principio di non contraddizione).
g) $\neg(\alpha\wedge\beta)\equiv(\neg\alpha)\vee(\neg\beta)$ (legge di De Morgan)
h) $\neg(\alpha\vee\beta)\equiv(\neg\alpha)\wedge(\neg\beta)$ (legge di De Morgan)
i) $\neg(\neg(\alpha))\equiv\alpha$ (legge della doppia negazione).

La dimostrazione della seguente proposizione si omette.

Proposizione 6. Se α è una sottoformula di β, $\alpha\equiv\alpha'$ e β' si ottiene da β sostituendo al posto di α la formula α' allora $\beta\equiv\beta'$.

Ad esempio se β è la formula $p_1\wedge(\neg(\neg p_2))$, α la formula $\neg(\neg(p_2))$ ed α' la formula p_2 allora essendo $\neg(\neg(p_2))\equiv p_2$ risulta $p_1\wedge(\neg(\neg\, p_2))\equiv p_1\wedge p_2$.
Le equivalenze provate consentono di sviluppare un vero e proprio calcolo delle proposizioni. Ad esempio

$$\neg(\alpha\wedge\neg(\beta\vee\neg\alpha))\equiv\neg\alpha\vee(\neg(\neg\beta\vee\neg\alpha))\equiv\neg\alpha\vee(\neg(\neg(\beta))\wedge(\neg(\neg\alpha)))\equiv\neg\alpha\vee(\beta\wedge\alpha)$$
$$\equiv(\neg\alpha\vee\beta)\wedge(\neg\alpha\vee\alpha)\equiv\neg\alpha\vee\beta.$$

4. Il teorema di completezza funzionale: è inutile aggiungere nuovi connettivi
Abbiamo visto che ogni proposizione determina una tavola di verità e quindi una funzione di $\{0,1\}^n$ in $\{0,1\}$. Viceversa, ogni funzione di $\{0,1\}^n\rightarrow\{0,1\}$ può essere ottenuta come tavola di verità di una opportuna proposizione come mostra il seguente teorema noto sotto il nome di *teorema di completezza funzionale*.

Teorema 1 (Teorema di completezza funzionale). Data una funzione $t : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ esiste una formula in forma normale disgiuntiva che ha t come tavola di verità.

Dim. Cominciamo con un esempio e consideriamo la tavola di verità t che assume solo il valore 0. Allora una qualunque contraddizione è una formula che ha t come tavola di verità. Ad esempio possiamo considerare la formula $p_1 \wedge \neg p_1$ (interpretata come funzione di due variabili) o la formula $(p_1 \wedge \neg p_1) \vee (p_2 \wedge \neg p_2)$.

p_1	p_2	
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	0

p_1	p_2	
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	0

Consideriamo una tavola di verità che assume in una sola riga il valore 1, ad esempio nella seconda riga: allora è evidente che questa è la tavola di verità della $p_1 \wedge \neg p_2$. Tale formula si ottiene congiungendo il letterale positivo p_1 (in quanto il valore di p_1 nella terza riga è 1) con il letterale negativo $\neg p_2$ (in quanto il valore di p_2 nella terza riga è 0).

Consideriamo ora una tavola in cui viene assunto due volte il valore 1, ad esempio nella seconda e nella quarta riga: allora basta considerare la formula $(p_1 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2)$ che si ottiene come disgiunzione della formula $p_1 \wedge \neg p_2$ (ottenuta guardando la seconda riga) con la formula $\neg p_1 \wedge \neg p_2$ (ottenuta guardando la quarta riga).

p_1	p_2	
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	1

Più in generale:
- se nella tavola di verità compaiono h valori uguali ad 1 allora la formula cercata sarà la disgiunzione di h formule, una per ogni riga in cui compare 1.

Una dimostrazione più rigorosa è la seguente. Procediamo per induzione sul numero di volte m in cui t assume il valore 1. Se $m = 0$ allora la contraddizione $(p_1 \wedge (\neg p_1)) \vee ... \vee (p_n \wedge (\neg p_n))$ ha t come tavola di verità. Se $u(t) = 1$, detto $a = (a_1,...,a_n) \in \{0,1\}^n$ l'unico elemento tale che $t(a) = 1$, t sarà la tavola di verità della formula $\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n$ dove $\alpha_i = p_i$ se $a_i = 1$ e $\alpha_i = \neg p_i$ se $a_i = 0$.
Sia $m > 1$ e supponiamo che il teorema sia vero per il numero m-1. Detto allora a un elemento in $\{0,1\}^n$ tale che $t(a) = 1$ definiamo la tavola di verità t_1 ponendo $t_1(x) = t(x)$ se $x \neq a$ e $t_1(x) = 0$ se $x = a$. Indichiamo poi con t_2 la tavola di verità che assume valore 1 solo in a. Poiché t_1 ha m-1 presenze di 1, per ipotesi di induzione esiste una formula α_1 la cui tavola di verità è t_1. Poiché t_2 ha solo una presenza di 1, abbiamo già provato che esiste una formula α_2 la cui tavola di verità è t_2. Osservando che $t(x) = max\{t_1(x), t_2(x)\}$, possiamo concludere che t è la tavola di verità della formula in forma normale disgiuntiva $\alpha_1 \vee \alpha_2$. □

Un modo equivalente di formulare il teorema di completezza funzionale è il seguente.

Corollario 2. E' inutile aggiungere nuovi connettivi al calcolo proposizionale in quanto ogni nuovo connettivo può essere sempre definito tramite $\wedge$, $\vee$, $\neg$.

Ad esempio supponiamo di volere aggiungere un connettivo $\oplus$, che chiamiamo *aut-aut*, il cui significato è che $p \oplus q$ vale solo quando vale p oppure quando vale q ma non quando valgono entrambi. Allora la tavola di verità di tale connettivo sarebbe la seguente. Ora se applichiamo il teorema di completezza funzionale a tale tavola otteniamo la formula $(p_1\wedge\neg p_2)\vee(\neg p_1\wedge p_2)$ che si ottiene come disgiunzione della formula $p_1\wedge\neg p_2$ (ottenuta guardando la seconda riga) con la formula $\neg p_1\wedge p_2$ (ottenuta guardando la terza riga). Ne segue che quanto affermato dalla formula $p\oplus q$ è equivalente a quanto affermato dalla formula $(p_1\wedge\neg p_2)\vee(\neg p_1\wedge p_2)$. In altre parole il nuovo connettivo logico $\oplus$ non aumenta la capacità espressiva del mio linguaggio.

p_1	p_2	$p\oplus q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Corollario 3. Ogni formula è logicamente equivalente ad una formula in forma normale disgiuntiva.

Dim. Sia α una formula e sia t_α la sua tavola di verità. Seguendo il procedimento della proposizione precedente si costruisca allora una formula β che abbia t_α come tavola di verità. Allora β è una formula in forma normale disgiuntiva logicamente equivalente ad α. □

Ad esempio, consideriamo la formula $\neg(p_1\vee\neg p_2))\vee p_1$ di cui abbiamo già calcolato la tavola di verità t. In tale tavola compare 1 nella prima, seconda e terza riga. Allora in base al teorema di completezza funzionale, la formula $(p_1\wedge p_2)\vee(p_1\wedge\neg p_2)\vee(\neg p_1\wedge p_2)$ ha t come tavola di verità. Poiché la tavola di verità di $\neg(p_1\vee\neg p_2))\vee p_1$ coincide con quella della formula $(p_1\wedge p_2)\vee(p_1\wedge\neg p_2)\vee(\neg p_1\wedge p_2)$, le due formula sono logicamente equivalenti.

Abbiamo visto che ogni formula può essere scritta in forma normale disgiuntiva, cioè come disgiunzione di formule che a loro volta sono congiunzioni di letterali. E' possibile trovare un altro tipo di forma normale.

Proposizione 4. Ogni formula è equivalente ad una formula in forma normale congiuntiva, cioè ad una congiunzione di clausole.

Dim. Per prima cosa proviamo che la negata di una formula β scritta in forma normale disgiuntiva è equivalente ad una formula scritta in forma normale congiuntiva e viceversa. Infatti, sia β una formula in cui compaiono le variabili proposizionali $p_1,\dots,p_n$ e supponiamo che sia scritta in forma normale disgiuntiva $\beta^{i(1)}\vee\dots\vee\beta^{i(h)}$ con β^i uguale ad una congiunzione di letterali $\alpha^j_1\wedge\dots\wedge\alpha^j_n$. Allora risulta che

$$\neg\beta = \neg(\beta^{i(1)}\vee\dots\vee\beta^{i(h)}) \equiv (\neg\beta^{i(1)})\wedge\dots\wedge(\neg\beta^{i(h)}).$$

D'altra parte

$$\neg\beta^i \equiv \neg(\alpha^j_1\wedge\dots\wedge\alpha^j_n) \equiv (\neg\alpha^j_1)\vee\dots\vee(\neg\alpha^j_n)$$

e pertanto, tenento conto che al posto di una formula del tipo $\neg(\neg(p_i))$ è possibile porre direttamente p_i, $\neg\beta_i$ e equivalente ad una clausola. In conclusione $\neg\beta$ è equivalente ad una congiunzione di clausole.

Sia α una formula e sia β una formula in forma normale disgiuntiva equivalente a $\neg\alpha$. Allora per quanto detto sopra la formula $\neg(\neg(\alpha))$ è equivalente ad una formula in forma normale congiuntiva. Poiché α è equivalente a $\neg(\neg(\alpha))$ la proposizione è provata. □

5. Sistemi di riscrittura per la forma normale disgiuntiva

Data una formula α vogliamo trovare una formula che sia particolarmente semplice e che sia logicamente equivalente ad α. Possiamo allora applicare l’idea di sistema di riscrittura che abbiamo considerato nel capitolo precedente. Questo significa che una data formula deve essere “riscritta” secondo certe regole in una formula equivalente (che si ritiene più semplice) e che poi la formula ottenuta debba essere riscritta ancora e così via. Ci si ferma se si è pervenuti ad una formula che non può essere più riscritta (cioè semplificata) o che si considera per qualche motivo sufficientemente semplice. In termini di "gioco" si tratta di considerare un gioco in cui le regole ammesse fanno passare da una formula ad una formula equivalente e le formule "vincenti" (ridotte a forma normale) sono un insieme di *Goal* di formule che si considerano per qualche motivo sufficientemente semplici.

Cominciamo con la riduzione ad una forma normale in cui *Goal* è l'insieme delle formule in cui la negazione compare solo applicata a variabili proposizionali.

Proposizione 5.1. Esiste un sistema di riscrittura che permette di ridurre ogni formula del calcolo proposizionale in una formula equivalente in cui la negazione compare solo davanti alle variabili proposizionali.

Dim. Basta "spingere all'interno" la negazione utilizzando le leggi di De Morgan e la legge di doppia negazione. Più precisamente, consideriamo come insieme *S* di stati l'insieme di tutte le formule. Consideriamo poi le tre seguenti regole $\rightarrow_1, \rightarrow_2, \rightarrow_3$:
1. ogni sottoformula del tipo $\neg(\alpha\vee\beta)$ può essere sostituita con $(\neg\alpha)\wedge(\neg\beta)$
2. ogni sottoformula del tipo $\neg(\alpha\wedge\beta)$ può essere sostituita con $(\neg\alpha)\vee(\neg\beta)$
3. ogni sottoformula del tipo $\neg(\neg(\alpha))$ può essere sostituita con α.
Queste regole permettono di passare da una formula ad un'altra logicamente equivalente che in un certo senso è "più vicina" all'obbiettivo da raggiungere (in questo caso l'obbiettivo è ottenere una formula in cui la negazione è applicata alle sole formule atomiche). Si ottiene la forma normale quando non è possibile applicare nessuna di queste regole e questo avviene quando $\neg$ compare solo davanti alle variabili proposizionali. Naturalmente bisognerebbe provare che non esistono catene infinite in questo sistema di riduzione. □

Ad esempio la formula $\neg(p_1\vee(p_2\wedge\neg p_3))$ può essere trasformata al modo seguente

$$\neg(p_1\vee(p_2\wedge\neg p_3)) \rightarrow_1 \neg p_1\wedge\neg(p_2\wedge\neg p_3) \rightarrow_2 \neg p_1\wedge(\neg p_2\vee\neg\neg p_3) \rightarrow_3 \neg p_1\wedge(\neg p_2\vee p_3)$$

Un sistema di riscrittura più interessante in cui *Goal* è costituito dall'insieme delle formule in forma normale disgiuntiva.

Proposizione 5.2. Esiste un sistema di riscrittura che permette di ridurre ogni formula in una formula logicamente equivalente in forma normale disgiuntiva.

Dim. In altre parole vogliamo trasformare una formula α in una formula β in modo che
- in β la negazione operi solo sulle variabili proposizionali
- β sia disgiunzione di formule ciascuna delle quali non contiene la disgiunzione.

La prima cosa che possiamo fare è:
1. Tramite la procedura della proposizione 5.1 facciamo in modo che la negazione compaia solo avanti alle variabili proposizionali.

Successivamente ci serviamo delle equivalenze logiche
$(\alpha\vee\beta)\wedge\gamma\equiv(\alpha\wedge\gamma)\vee(\beta\wedge\gamma)$ e $\gamma\wedge\alpha\equiv\alpha\wedge\gamma$
cioè della proprietà distributiva di $\wedge$ rispetto a $\vee$ e della proprietà commutativa. Più precisamente applichiamo il seguente sistema di regole di riscrittura:
4. ogni sottoformula del tipo $\gamma\wedge(\alpha\vee\beta)$ può essere sostituita con una formula del tipo $(\gamma\wedge\alpha)\vee(\gamma\wedge\beta)$
5. ogni sottoformula del tipo $\gamma\wedge\alpha$ può essere sostituita con una formula del tipo $\alpha\wedge\gamma$
Si noti che una formula avente *n* volte il connettivo $\vee$ a cui si applicata l'istruzione 4 si spezza nella disgiunzione di due formule in cui il connettivo $\vee$ compare *n*-1 volte. E' chiaro

allora che dopo un numero finito di passi la nostra formula sarà ridotta alla forma $\gamma_1\vee...\vee\gamma_n$ con $\gamma_1,...,\gamma_n$ formule non contenenti $\vee$ e quindi sarà ridotta in forma normale disgiuntiva. □

Esempio 1. Consideriamo la formula $\neg(p_1\vee((p_2\vee p_1)\wedge p_3))$. Allora possiamo cominciare con il trasformarla in una formula logicamente equivalente in cui la negazione si applica solo a variabili proposizionali. Si procede al modo seguente:

$\neg(p_1\vee((p_2\vee p_1)\wedge p_3)) \to_1 \neg p_1\wedge\neg((p_2\vee p_1)\wedge p_3)) \to_2 \neg p_1\wedge(\neg(p_2\vee p_1)\vee\neg p_3)$

$\to_1 \neg p_1\wedge((\neg p_2\wedge\neg p_1)\vee\neg p_3)$.

Successivamente possiamo operare sulla formula risultante $\neg p_1\wedge((\neg p_2\wedge\neg p_1)\vee\neg p_3)$ tramite la regola 4 al modo seguente

$\neg p_1\wedge((\neg p_2\wedge\neg p_1)\vee\neg p_3) \to_4 (\neg p_1\wedge(\neg p_2\wedge\neg p_1))\vee(\neg p_1\wedge\neg p_3)$

Pertanto forma normale disgiuntiva di $\neg(p_1\vee((p_2\vee p_1)\wedge p_3))$ è

$(\neg p_1\wedge(\neg p_2\wedge\neg p_1))\vee(\neg p_1\wedge\neg p_3)$.

Un sistema di riscrittura migliore potrebbe utilizzare anche altre regole, come ad esempio la regola di assorbimento e la regola di associatività per $\wedge$.

6. ogni sottoformula de tipo $\alpha\wedge\alpha$ può essere sostituita con α
7. ogni formula del tipo $\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)$ può essere sostituita con $(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma$.

In tale caso potremmo proseguire nella trasformazione ponendo

$(\neg p_1\wedge(\neg p_2\wedge\neg p_1))\vee(\neg p_1\wedge\neg p_3)$

$\to_5 (\neg p_1\wedge(\neg p_1\wedge\neg p_2))\vee(\neg p_1\wedge\neg p_3)$

$\to_7 ((\neg p_1\wedge\neg p_1)\wedge\neg p_2))\vee(\neg p_1\wedge\neg p_3)$

$\to_6 (\neg p_1\wedge\neg p_2)\vee(\neg p_1\wedge\neg p_3)$.

Esempio 2. Consideriamo la formula $\neg(p_1\wedge((p_2\wedge p_1)\vee p_3))$ e trasformiamola in una formula in cui la negazione si applica solo a variabili proposizionali al modo seguente (questa volta, per brevità, non specifichiamo la regola adottata):

$\neg(p_1\wedge((p_2\wedge p_1)\vee p_3)) \to \neg p_1\vee\neg((p_2\wedge p_1)\vee p_3)) \to \neg p_1\vee(\neg(p_2\wedge p_1)\wedge\neg p_3)$

$\to \neg p_1\vee((\neg p_2\vee\neg p_1)\wedge\neg p_3)\to \neg p_1\vee((\neg p_2\wedge\neg p_3)\vee(\neg p_1\wedge\neg p_3))$.

Pertanto la forma normale disgiuntiva di $\neg(p_1\wedge((p_2\wedge p_1)\vee p_3))$ è $\neg p_1\vee(\neg p_2\wedge\neg p_3)\vee(\neg p_1\wedge\neg p_3)$.

Non è difficile definire anche un sistema per la riduzione in forma normale congiuntiva.

6. Il metodo dei tableaux semantici: un esempio di intelligenza artificiale.

Uno dei metodi più efficienti per verificare che una formula è una tautologia è il metodo dei Tableaux semantici. Tale metodo è un *sistema di confutazione*. Ciò significa che per provare che una formula α è una tautologia si suppone che tale formula sia falsa e si vede che questa ipotesi conduce ad una contraddizione. Per introdurre tale metodo esaminiamo come un matematico procederebbe per provare "per assurdo" che una formula è sempre vera. Facciamo un esempio e riferiamoci alla formula $p\wedge q\to(\neg(\neg q))$.

Ragionamento informale: Se $p\wedge q\to(\neg(\neg q))$ fosse falsa allora $p\wedge q$ sarebbe vera e $(\neg(\neg q))$ falsa. Ma allora da un lato sarebbero vere p e q, dall'altro $\neg q$ sarebbe vera e quindi q falsa. In definitiva si arriva all'assurdo per cui q dovrebbe essere sia vera che falsa allo stesso tempo. L'assurdo cui siamo pervenuti prova che $p\wedge q\to(\neg(\neg q))$ non può mai essere falsa e che quindi tale formula è una tautologia.

Espressione sintetica: Possiamo esprimere tale argomentazione in maniera sintetica tramite il seguente schema dove usiamo la parola $F\alpha$ per denotare che α è falsa e la parola $V\alpha$ per denotare che la formula α è vera.

1. $F\ p\wedge q\rightarrow(\neg(\neg q))$ (supponiamo $p\wedge q\rightarrow(\neg(\neg q))$ falsa)
$\downarrow$
2. $V\ p\wedge q$ (allora $p\wedge q$ è vera)
$\downarrow$
3. $F\ (\neg(\neg q))$ (e $\neg(\neg q)$ è falsa)
$\downarrow$
4. $V\ p$ (ma allora da 2 segue che p è vera)
$\downarrow$
5. $\boldsymbol{V\ q}$ (e che anche q è vera)
$\downarrow$
6. $V\ \neg q$ (inoltre da 3 segue che $\neg\ q$ è vera)
$\downarrow$
7. $\boldsymbol{F\ q}$ (e quindi che q è falsa)

$\times$ (ma 5 e 7 sono in contraddizione tra loro, quindi è assurdo supporre che $p\wedge q\rightarrow(\neg(\neg q))$ possa essere falsa)

Da notare che abbiamo usato il simbolo $\times$ per dire che si è giunti ad una contraddizione ed abbiamo evidenziato in grassetto le due asserzioni contraddittorie. Tale schema è un particolare grafo (si veda le definizioni di grafo data nel Capitolo 2) chiamato *albero*.

Un altro esempio, ragionamento informale: Per fare un altro esempio, proviamo a dimostrare che la formula $(q\vee\neg q)\wedge(q\rightarrow q)$ è una tautologia e supponiamo quindi, per assurdo, che sia falsa. Allora o sarebbe falsa $(q\vee\neg q)$ oppure sarebbe falsa $q\rightarrow q$. Pertanto o sarebbero false q e $\neg q$ e quindi falsa q e vera q oppure sarebbe vera q e falsa q. Entrambi i casi sono assurdi e quindi possiamo concludere che $(q\vee\neg q)\wedge(q\rightarrow q)$ è una tautologia.

Espressione sintetica: Esprimiamo sinteticamente queste argomentazioni tramite il seguente albero:

1. $F\ (q\vee\neg q)\wedge(q\rightarrow q)$ (supponiamo che $(q\vee\neg q)\wedge(q\rightarrow q)$ sia falsa)
$\swarrow \quad \searrow$
2a. $F\ (q\vee\neg q)$ 2b $F\ (q\rightarrow q)$ (allora due sono i casi, o è falsa $(q\vee\neg q)$ o è falsa $(q\rightarrow q)$)
$\downarrow \quad \downarrow$
3a $\boldsymbol{F\ q}$ 3b $\boldsymbol{V\ q}$ (nel primo caso … (nel secondo caso …
$\downarrow \quad \downarrow$
4a $F\ \neg q$ 4b $\boldsymbol{F\ q}$
$\downarrow \quad \times$
5a $\boldsymbol{V\ q}$
$\times$

La formalizzazione: L'intelligenza artificiale si preoccupa di formalizzare e di meccanizzare le varie forme del ragionamento umano. In particolare possiamo formalizzare e meccanizzare le dimostrazioni per assurdo che abbiamo ora esposto. Nell'esprimere sinteticamente tali dimostrazioni abbiamo costruito degli *alberi*[2], in cui nei nodi sono state messe delle *formule segnate* cioè delle formule precedute dalla lettera V o dalla lettera F. Tali alberi vengono

[2] Per la nomenclatura sui grafici si veda il paragrafo 2 del capitolo 2.

chiamati *tableau*. Diciamo che la formula segnata $F\phi$ *vale* se ϕ assume il valore di verità 0, diciamo che la formula segnata $V\phi$ *vale* se ϕ assume il valore di verità 1.
L'insieme delle formule segnate viene suddiviso in due classi: le formule proposizionali di *tipo congiuntivo* e quelle di *tipo disgiuntivo*.

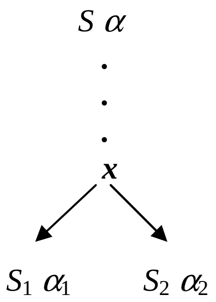
Sono di tipo congiuntivo
$V(\phi\wedge\chi)$ che vale se e solo se valgono simultaneamente $V\phi$ e $V\chi$,
$F(\phi\vee\chi)$ che vale se e solo se valgono simultaneamente $F\phi$ e $F\chi$,
$F\ \phi\rightarrow\chi$ che vale se e solo se valgono simultaneamente $V\phi$ e $F\chi$,

Sono di tipo disgiuntivo
$F(\phi\wedge\chi)$ che vale se e solo se risulta $F\phi$ oppure $F\chi$.
$V(\phi\vee\chi)$ che vale se e solo se risulta $V\phi$ oppure $V\chi$.
$V\ \phi\rightarrow\chi$ che vale se e solo se risulta $F\phi$ oppure $V\chi$.
Osserviamo poi che
$V\neg\phi$ vale se e solo se $F\phi$
$F\neg\phi$ vale se e solo se $V\phi$

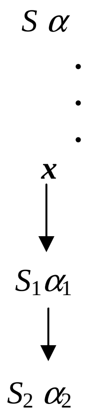
Queste regole riconducono la verità di una formula segnata alla verità di due sottoformule segnate o di una sottoformula segnata. Da notare che:
- in una regola disgiuntiva $S\alpha$ è vera se e solo se o è vera $S_1\alpha_1$ oppure è vera $S_2\alpha_2$
- in una regola congiuntiva $S\alpha$ è vera se e solo se è vera sia $S_1\alpha_1$ che $S_2\alpha_2$.

Regole di espansione. Ad ogni formula segnata $S\alpha$ viene assegnata una regola di espansione per la costruzione di un tableau. Per quelle di tipo disgiuntivo la regola consiste nell'espandere una foglia x che segua $S\alpha$ in due foglie $S_1\alpha_1$ $S_2\alpha_2$ entrambe successive ad x. Per le regole di tipo congiuntivo la regola consiste invece nell'espandere una foglia x che segua $S\alpha$ in due foglie $S_1\alpha_1$ ed $S_2\alpha_2$ con $S_1\alpha_1$ successivo ad x ed $S_2\alpha_2$ successivo a $S_1\alpha_1$.

Regola disgiuntiva



Regola congiuntiva



Per costruire un tableau si parte da una formula segnata ed a seconda dei casi si applica una regola disgiuntiva od una regola congiuntiva. Successivamente data una foglia possiamo prolungare il tableau partendo dalla formula di ogni foglia ed applicando l'opportuna regola di espansione.

Definizione 1. La nozione di tableau è definita tramite le seguenti regole:
(T-1) una formula segnata è un tableau (che si riduce ad un solo punto)

(T-2) se T è un tableau, $S\alpha$ è un nodo di T, allora si può costruire un nuovo tableau T' estendendo ogni foglia che è successiva ad $S\alpha$ in accordo con la regola di espansione di $S\alpha$.

Ricordiamo che un ramo in un grafo è un percorso massimale.

Definizione 2. Due formule del tipo $S_1\phi$ e $S_2\phi$ con $S_1 \neq S_2$ sono chiamate *complementari*. Un ramo di un tableau è detto *chiuso* se contiene una coppia di formule complementari. Diversamente è chiamato *aperto*. Un tableau è *chiuso* se tutti i suoi rami sono chiusi. Per indicare che un ramo è chiuso scriveremo $\times$ sotto la relativa foglia.

Per provare che ϕ è una tautologia partiamo da $F\phi$ cioè supponiamo che ϕ sia falsa. Procediamo poi a costruire un tableau sempre più grande applicando le regole di espansione. Appena troviamo che un ramo è chiuso passiamo a costruire altri rami fino a quando non riusciamo a chiudere tutti i rami ed ad ottenere un tableau chiuso la cui radice è $F\phi$.

Definizione 3. (tableau dimostrabile). Una formula ϕ è *tableau dimostrabile*, in simboli: $' \phi$, se esiste un tableau chiuso la cui radice è $F\phi$.

Esempio. Consideriamo la formula $p\rightarrow(q\rightarrow p)$. Otteniamo il tableau

$F\ p\rightarrow(q\rightarrow p)$.

$\downarrow$

$V\ p$

$\downarrow$

$F\ q\rightarrow p$

$\downarrow$

$V\ q$

$\downarrow$

$F\ p$

$\times$

Tale tableau è chiuso, quindi $p\rightarrow(q\rightarrow p)$ è dimostrabile.

E' possibile dimostrare il seguente teorema.

Teorema 4. (Teorema di completezza). Sia ϕ una formula. Allora ϕ è una tautologia se e solo se esiste un tableau chiuso di radice $F\phi$. In simboli:

$$\leq \phi \quad \text{se e solo se} \ ' \phi.$$

Esempio. Costruiamo un tableau per la formula $[(s\rightarrow q)\vee(s\rightarrow p)]\rightarrow(p\vee q)$

$F\ [(s\rightarrow q)\vee(s\rightarrow p)]\rightarrow(p\vee q)$

$\downarrow$

$V\ [(s\rightarrow q)\vee(s\rightarrow p)]$

$\downarrow$

$F\ (p\vee q)$

$\downarrow$ $\searrow$

$V\ (s\rightarrow q)$ $\qquad V\ (s\rightarrow p)$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$F\ p \qquad F\ p$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$F\ q \qquad F\ q$

$\swarrow \ \searrow \qquad \searrow$

$\downarrow$

$F\,s \quad Vq \quad Fs \quad Vp$

$\times \quad \times$

Questo tableau non è chiuso e quindi $[(s\to q)\vee(s\to p)]\to(p\vee q)$ non è una tautologia. I rami che non chiudono ci dicono anche che ponendo p falso, q falso ed s falso otteniamo un caso in cui la formula è falsa.

Esempio. Consideriamo la formula $p\vee q\to p\wedge q$, avremo il tableau

$F\ p\vee q\to p\wedge q$

$\downarrow$

$V\ p\vee q$

$\downarrow$

$F\ p\wedge q$

$Vp \quad Vq$

$F\,p \quad F\,q \quad Fp \quad F\,q$

$\times \quad \times$

In cui esistono due rami che non chiudono. Questi due rami dicono che $p\vee q\to p\wedge q$ può essere falsa o nel caso in cui è vera p e falsa q oppure nel caso in cui è vera q e falsa p.

6. Un approccio algebrico alla semantica del calcolo proposizionale.

Il calcolo proposizionale può essere definito in maniera più elegante in termini di strutture algebriche e di omomorfismi. Cominciamo con il considerare l'insieme Λ delle formule come struttura algebrica.

Definizione 1. Chiamiamo *algebra libera delle formule del calcolo proposizionale* la struttura algebrica $\mathbf{\Lambda} = (\Lambda, \wedge', \vee', \neg')$ il cui dominio è l'insieme Λ delle formule del calcolo proposizionale ed in cui

- $\wedge'$ è l'operazione che associa ad ogni coppia di formule α e β la formula $(\alpha)\wedge(\beta)$
- $\vee'$ è l'operazione che associa ad ogni coppia di formule α e β la formula $(\alpha)\vee(\beta)$
- $\neg'$ è l'operazione che associa ad ogni formula α la formula $\neg(\alpha)$.

Si noti che tale struttura in un certo senso non verifica nessun tipo di equazione e da ciò nasce il termine *"libera"*. Ad esempio non vale la proprietà commutativa poiché la formula $(\alpha)\wedge(\beta)$ e diversa dalla formula $(\beta)\wedge(\alpha)$, non vale la proprietà associativa poiché la formula $(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma$ è diversa dalla formula $\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)$.

Proposizione 2. Le valutazioni del calcolo proposizionale coincidono con gli omomorfismi di $\mathbf{\Lambda}$ nell'algebra di Boole $\mathbf{2}$. Ne segue che, essendo l'insieme Vp delle variabili proposizionale un sistema di generatori di $\mathbf{\Lambda}$, ogni funzione di Vp in $\{0,1\}$ può essere estesa in modo univoco ad una valutazione v.

Dim. Basta ricordare che una valutazione è una funzione v di Λ in $\{0,1\}$ tale che

$$v(\alpha\wedge\beta) = min\{v(\alpha),v(\beta)\} \ ; \quad v(\alpha\vee\beta) = max\{v(\alpha),v(\beta)\} \ ; \ v(\neg\alpha) = \sim v(\alpha). \qquad \square$$

Per introdurre l'equivalenza logica e l'algebra delle formule è conveniente cambiare leggermente la definizione di tavola di verità e chiamare *tavola di verità generalizzata* una qualunque funzione $t:\{0,1\}^N\to\{0,1\}$. Indichiamo con T l'insieme delle tavole di verità generalizzate, con $t_0 \in T$ la funzione costantemente uguale a 0 e con t_1 la funzione costantemente uguale ad 1. Allora chiamiamo *algebra delle tavole di verità generalizate* la struttura $(T, \wedge, \vee, \sim, t_0, t_1)$ tale che, per ogni t e $t' \in T$ ed $x \in \{0,1\}^N$,

$(t \wedge t')(x) = min\{t(x), t'(x)\}$;

$(t \vee t')(x) = max\{t(x), t'(x)\}$;

$(\sim t)(x) = 1 - t(x)$.

Ad ogni formula α viene associata una tavola di verità generalizzata $Tav(\alpha)$ al modo seguente.

Indichiamo con π_i la funzione *proiezione i-esima*, cioè la funzione che associa ad ogni elemento $v \in \{0,1\}^N$ il valore $v(i)$. Allora poniamo:

$Tav(p_i) = \pi_i$

$Tav(\alpha \wedge \beta) = min\{Tav(\alpha), Tav(\beta)\}$

$Tav(\alpha \vee \beta) = max\{Tav(\alpha), Tav(\beta)\}$

$Tav(\sim\alpha) = 1 - Tav(\alpha)$.

Chiamiamo *tavola di verità* una tavola di verità generalizzata che si ottiene come immagine tramite *Tav* di una formula. Si noti che in una tavola di verità i valori dipendono solo da un numero finito di variabili. Da ciò segue che per le tavole di verità generalizzate non vale un teorema di completezza funzionale. Infatti esistono tavole di verità generalizzate che non sono tavole di verità. Ad esempio, sia $t \in T$ la tavola definita ponendo $t(n) = 1$ se n è pari e $t(n) = 0$ se n è dispari. Allora non esiste nessuna formula avente t come tavola di verità.

Teorema 3. L'algebra delle tavole di verità è una algebra di Boole. La corrisponenza $Tav : A \to T$ è un omomorfismo dell'algebra delle formule nell'algebra delle tavole di verità generalizzate. Il nucleo di *Tav* coincide con l'equivalenza logica la quale pertanto è una congruenza nell'algebra delle formule. Il quoziente di A modulo $\equiv$ viene chiamato *l'algebra di Boole delle proposizioni* e viene denotato con ***B***. Tale quoziente è isomorfo alla sottoalgebra delle tavole di verità.

Dim. Dato un insieme S sappiamo che $\Pi(S)$ è un algebra di Boole e che tale algebra di Boole è isomorfa all'algebra $\{0,1\}^S$ delle funzioni caratteristiche. In particolare, ponendo $S = \{0,1\}^N$ possiamo asserire che l'algebra delle funzioni caratteristiche generalizzate è una algebra di Boole (isomorfa a $\Pi(\{0,1\}^N)$). □

Allora gli elementi di ***B*** sono classi complete d'equivalenza del tipo

$$[\alpha] = \{\alpha' \in \Lambda \mid \alpha' \text{ è logicamente equivalente ad } \alpha\},$$

inoltre in ***B*** sono definite tre operazioni (che corrispondono ai connettivi logici) tramite le equazioni

$$[\alpha] \wedge [\beta] = [\alpha \wedge \beta] \ ; \ [\alpha] \vee [\beta] = [\alpha \vee \beta] \ ; \sim[\alpha] = [\sim\alpha].$$

Infine esistono due particolari elementi in ***B***: l'insieme delle tautologie (che si indica con 1) è l'insieme delle contraddizioni (che si indica con 0).

Ovviamente

- $Tav^{-1}(t_0)$ coincide con l'insieme delle contraddizioni
- $Tav^{-1}(t_1)$ coincide con l'insieme delle tautologie.

Nota. L'approccio algebrico è utile se si vogliono studiare logiche diverse da quella (classica) che stiamo considerando. Infatti basta sostituire all'algebra di Boole **2** una diversa struttura algebrica per ottenere altri tipi di logiche. Ad esempio possiamo sostituire a **2** la struttura $U = ([0,1], \wedge, \vee, \sim)$ in cui le operazioni $\wedge$, $\vee$ sono il minimo, il massimo ed $1-x$. Chiamiamo allora *valutazione* ogni omomorfismo di $\mathbf{\Lambda}$ in U cioè ogni funzione $v : \Lambda \to [0,1]$ tale che

$$v(\alpha \wedge \beta) = min\{v(\alpha), v(\beta)\} \ ; \ v(\alpha \vee \beta) = max\{v(\alpha), v(\beta)\} \ ; \ v(\neg\alpha) = \sim v(\alpha)$$

In tale logica non vale né il principio del terzo escluso né il principio di non contraddizione. Ad esempio se la valutazione v è tale che $v(p_1) = 0.5$ allora $v(\neg p_1) = 1\text{-}v(p_1) = 1\text{-}0.5 = 0.5$ e che quindi

$$v(p_1\wedge\neg p_1) = min\{0.5, 0.5\} = 0.5 \ ; \ v(p_1\vee\neg p_1) = max\{0.5, 0.5\} = 0.5.$$

Il valore 1 si interpreta come vero, il valore 0 come falso e gli altri valori come diversi livelli di validità. Per fare un esempio, se p_1 è l'affermazione "Tizio è alto", allora se Tizio non è né alto né basso allora è ragionevole dare a tale affermazione valore di verità pari a 0.5. D'altra parte, non si può dire che l'affermazione

"Tizio è alto e non è alto"

che ha la struttura $\alpha\wedge\neg\alpha$, sia completamente falsa e non è possibile affermare neanche che l'affermazione

"Tizio è alto" oppure *"Tizio non è alto"*

sia completamente vera.

Problema. Vale la legge di doppia negazione?

Problema. (difficile) Dimostrare che nella logica sopra definita non esistono tautologie e non esistono contraddizioni.
Problema. (difficile) Esiste un teorema di completezza funzionale per tale logica?

Nota 2. Un altro tipo di logica si ottiene considerando un insieme S e l'algebra di Boole $(\Pi(S), \cap, \cup, -, \emptyset, S)$. Ad esempio S potrebbe essere un insieme di situazioni, inoltre una valutazione v potrebbe essere interpretata dicendo che $v(p_i)$ è l'insieme di situazioni in cui sia risultata vera la proposizione p_i. Oppure S potrebbe essere l'insieme delle città della terra e $v(p_i)$ l'insieme delle città in cui sia risultata vera la proposizione p_i. In tale caso il fatto che v sia un omomorfismo significa ad esempio che $v(\alpha\vee\beta) = v(\alpha)\cup v(\beta)$, cioè che l'insieme delle situazioni in cui è vero $\alpha\vee\beta$ è l'unione dell'insieme delle situazioni in cui è vera α con l'insieme delle situazioni in cui è vera β. In tale caso "il vero" sarà rappresentato da S poiché dire che $v(\alpha) = S$ vuol dire che in ogni situazione α è risultata vera. Invece "il falso" è rappresentato da $\emptyset$ poiché dire che $v(\alpha) = \emptyset$ vuol dire che in nessuna situazione α è risultata vera.

Problema. Dimostrare che $\alpha\vee\neg\alpha$ è una tautologia e che $\alpha\wedge\neg\alpha$ è una contraddizione.

7. Logiche a più valori di verità

La logica matematica è nata come strumento per dare un fondamento sicuro alla matematica e, pertanto, ha focalizzato la propria attenzione sulle forme di ragionamento dei matematici. Tuttavia attualmente la logica ha ampliato notevolmente i suoi scopi per diventare uno strumento fondamentale per l'intelligenza artificiale. Questo ha fatto nascere l'esigenza di formalizzare non solo il ragionamento matematico ma anche il modo di ragionare ed elaborare informazioni nella vita quotidiana. In tale ambito il restringersi ai soli valori di verità 0 ed 1 sembra non essere più sufficiente. Per illustrare la situazione supponiamo che ci venga richiesto di far un elenco dei numeri pari minori di 10 ed uno di quelli non sono pari. Allora, da buoni matematici, non esitiamo a dare come risposta gli insiemi {2, 4, 6, 8, 10} e {1, 3, 5, 7, 9}, cioè gli insiemi

$\{n$: "n è pari" ha valore di verità 1$\}$ e $\{n$: "n è pari" ha valore di verità 0$\}$.

Supponiamo che ci viene richiesto un elenco delle persone giovani presenti negli uffici dell'Università. In questo caso dobbiamo un po' interpretare tale richiesta ed ad esempio decidere che "essere giovane" significa avere meno di 27 anni. Ancora una volta saremo in grado di inviare i due elenchi richiesti

$\{x$: "*x è giovane*" ha valore di verità 1$\}$, $\{x$: "*x è giovane*" ha valore di verità 0$\}$.

Questa operazione è perfettamente leggittima, tuttavia ha qualche cosa di insoddisfacente in quanto sembrerebbe più giusto, nel trasmettere l'informazione richiesta, considerare un elenco i casi incerti, e quindi considerare oltre i due insiemi ora dati anche l'insieme

$$\{x : x \text{ è più o meno giovane}\}.$$

Ciò suggerisce di introdurre un nuovo valore di verità, il numero 1/2, e scrivere

$$\{x : \text{"}x \text{ è giovane" ha valore di verità } 1/2\}.$$

In definitiva mentre non ha senso parlare di un numero che è più o meno pari, sembrerebbe che tutte le volte che una proprietà si applica ad oggetti o persone della vita quotidiana, ci sia la possibilità che tale proprietà non sia né pienamente verificata né pienamente non verificata. Si pone poi il problema di definire il valore di verità di proposizione composte del tipo "Mario è giovane e Carlo è alto" conoscendo il valore di verità delle due componenti "Mario è giovane" e "Carlo è alto". In altre parole dobbiamo fare corrispondere ad ogni connettivo logico una operazione nell'insieme {0,1/2,1}. Ad esempio possiamo interpretare i connettivi $\wedge$, $\vee$ con il minimo ed il massimo e la negazione $\neg$ con $1\text{-}x$.
Le seguenti sono le tavole di verità dei connettivi.

p_1	P_2	$p_1 \vee p_2$	$p_1 \wedge p_2$
1	1	1	1
1	0.5	1	0.5
1	0	1	0
0.5	1	1	0.5
0.5	0.5	0.5	0.5
0.5	0	0.5	0
0	1	1	0
0	0.5	0.5	0
0	0	0	0

p_1	$\neg p_1$
1	0
0.5	0.5
0	1

Una valutazione $v : \Lambda \to \{0,1/2,1\}$ delle formule si ottiene per ricorsione assegnando valori alle variabili proposizionali e ponendo

$$v(\alpha\wedge\beta) = min\{v(\alpha),v(\beta)\} \ ; \ v(\alpha\vee\beta) = max\{v(\alpha), v(\beta)\} \ ; \ v(\neg\alpha) = 1-v(\alpha)$$

Nella logica che ne esce fuori non vale né il principio del terzo escluso né il principio di non contraddizione. Ad esempio se la valutazione v è tale che $v(p_1) = 0.5$ allora $v(\neg p_1) = 1\text{-}v(p_1) = 1\text{-}0.5 = 0.5$ e quindi

$$v(p_1\wedge\neg p_1) = min\{0.5, 0.5\} = 0.5 \ ; \ v(p_1\vee\neg p_1) = max\{0.5, 0.5\} = 0.5.$$

D'altra parte se qualcuno ci comunica che "n è pari e dispari" noi pensiamo che stia dicendo qualche cosa di sicuramente sbagliato, se invece ci dice "Mario è alto e non alto" noi non pensiamo che stia dicendo una cosa falsa ma piuttosto che Mario non si possa collocare né tra le persone decisamente alte né tra quelle decisamente basse. Possiamo anche associare ad ogni formula α le cui variabli proposizionali sono comprese tra $p_1,...,p_n$ una *tavola di verità* $t_\alpha:\{0,1/2,1\}^n\to\{0, 1/2, 1\}$ definita per ricorsione sulla complessità di α tramite le equazioni

$t_\alpha(x_1,...,x_n) = x_i$ se $\alpha = p_i$
$t_{\alpha\wedge\beta}(x_1,...,x_n) = min\{t_\alpha(x_1,...,x_n),t_\beta(x_1,...,x_n)\}$
$t_{\alpha\vee\beta}(x_1,...,x_n) = max\{t_\alpha(x_1,...,x_n),t_\beta(x_1,...,x_n)\}$
$t_{\neg\alpha}(x_1,...,x_n) = 1\text{-}t_\alpha(x_1,...,x_n)$.

Problema. Vale la legge di doppia negazione?

Problema. Dimostrare che nella logica sopra definita non esistono tautologie e non esistono contraddizioni.

E' ragionevole introdurre ulteriori valori di verità. Ad esempio potremmo volere rappresentare gli elenchi delle persone "senza dubbio molto giovani", "giovani", "più o meno giovani", "non giovani", "sicuramente non giovani" e così via. In definitiva possiamo introdurre insiemi di valori di verità del tipo {0,1/2,1} oppure del tipo {0,1/10, 2/10, ...,10/10} oppure del tipo [0,1] (intervallo dei numeri reali compresi tra 0 ed 1). La logica che utilizza {0,1} viene detta anche *logica classica* per distinguerla dalle logiche a più di due valori.

Alle logiche a più valori corrispondono porte logiche di tipo diverso da quelle che abbiamo esposto per la logica classica. Nel caso in cui l'insieme di valori di verità è {0,1/10, 2/10, ...,10/10} allora lungo le linee di ingresso e di uscita di una porte logica devono poter viaggiare segnali di 10 diversi livelli di intensità. La quantità di informazione che tali porte permetterebbero di trasmettere è enormemente superiore. Tuttavia la tecnologia non è ancora abbastanza avanzata per la costruzione di tali porte. Infatti basta una leggera alterazione della tensione perché un valore del tipo 5/7 si trasformi in un valore del tipo 6/7 o 4/7. Naturalmente il requisito matematico che si deve richiedere ad una logica a più valori per potere essere la base teorica per un sistema di porte logiche è il teorema di completezza funzionale. In proposito osserviamo che vale il seguente teorema.

Teorema 1. Il teorema di completezza funzionale non vale per la logica a più valori che abbiamo proposto.

Dim. Osserviamo prima che se α è una formula allora

$$t_\alpha(1/2,...,1/2) = 1/2.$$

Ne segue che, ad esempio, la funzione costantemente uguale a 1 non è la tavola di verità di nessuna formula. □

Per potere ottenere un teorema di completezza funzionale è necessario aggiungere ulteriori connettivi logici. Riprenderemo questa questione quando parleremo di algebre funzionalmente complete.