CAPITOLO 1

indice

UN PO' DI STORIA[1]

"se si lodano gli uomini che hanno determinato il numero di corpi regolari, che non ha utilità alcuna se non in quanto è piacevole a contemplarsi, quanto sarà più meritorio ridurre a leggi matematiche il ragionamento umano, che è ciò che di più eccellente e di più utile possediamo." W. G. Leibniz.

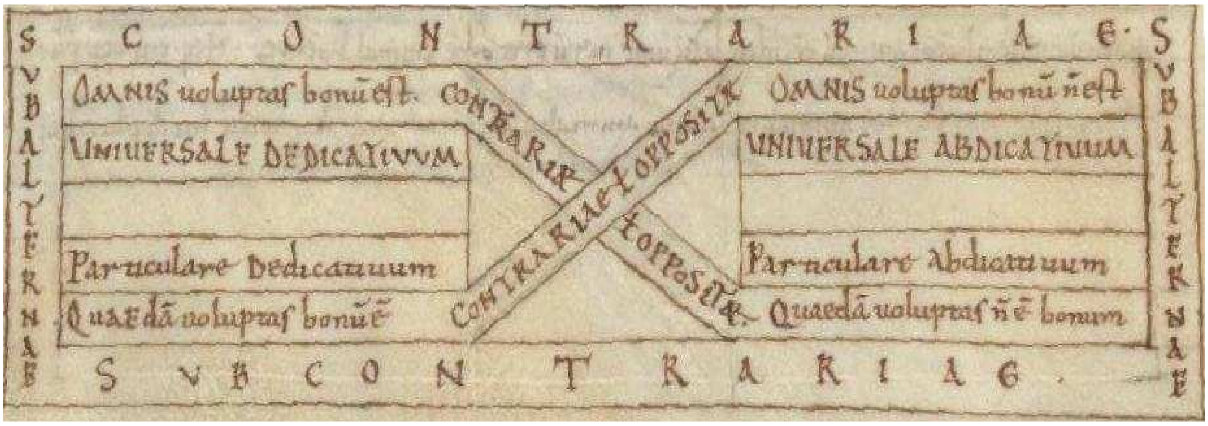
1. Il contributo di Aristotele

I primi tentativi sistematici di studiare le varie forme di ragionamento sono dovuti agli antichi greci, e più precisamente ad Aristotele (340 A.C.) ed alla scuola stoica (300 A.C.). In particolare è famosa la teoria dei sillogismi di Aristotele che è stata oggetto di studio da parte di tutti gli uomini di cultura fino al secolo diciassettesimo.

Aristotele sostiene che tutti i ragionamenti si riferiscono ad enunciati[2] di quattro tipi:

A. Universali affermativi: ad esempio ... "tutti i greci sono mortali"
I. Particolari affermativi: ad esempio ... "alcuni greci sono mortali"
E. Universali negativi: ad esempio ... "nessun greco è mortale"
O. Particolari negativi: ad esempio ... "alcuni greci non sono mortali".

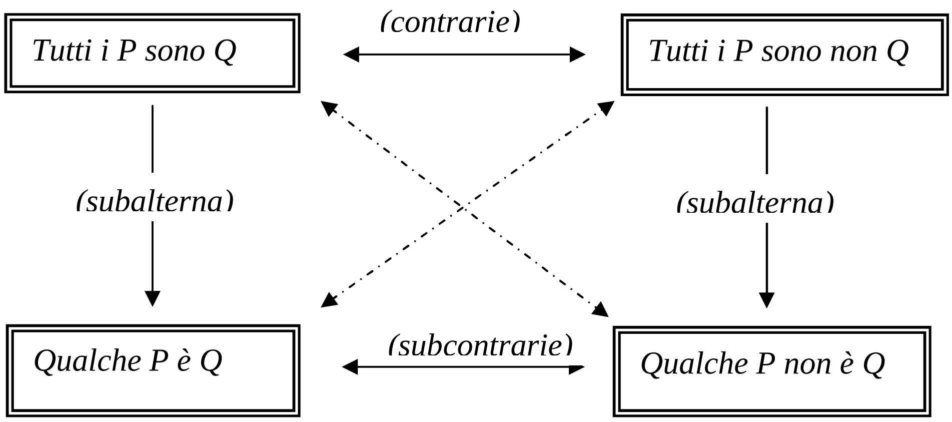
(le lettere utilizzate per indicare tali tipi di enunciati sono state introdotte dai logici medioevali). Tra tali enunciati esiste un rapporto che, nel medioevo, veniva rappresentato al modo seguente e veniva chiamato "quadrilatero di Aristotele":



Si leggono alcune parole, in latino, che rappresentano il nome delle relazioni intercorrenti tra i tipi di enunciati. Nella figura seguente si riporta in chiaro un tale tipo di schema:

[1] Il lettore interessato solo agli aspetti matematici della logica può saltare direttamente al Capitolo 2.
[2] In logica matematica prende il nome di "enunciato" una qualunque espressione linguistica di cui si possa dire che sia vera o che sia falsa.

Quadrilatero Aristotelico delle proposizioni



Le due diagonali punteggiate collegano proposizioni *contraddittorie* cioè tali che una equivale alla negazione dell'altra. Le due frecce verticali collegano proposizioni in cui quella di sotto viene chiamata *subalterna* di quella di sopra. La prima doppia freccia orizzontale collega proposizioni che vengono dette *contrarie* tra loro. La seconda doppia freccia orizzontale collega proposizioni che vengono dette *subcontrarie* tra di loro.

E' interessante osservare che nella logica aristotelica si riteneva che una proposizione universale affermativa o negativa implicasse la sua *subalterna*. In altri termini la logica aristotelica assumeva come logicamente vere le implicazioni:

$$[\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))] \rightarrow [\exists x(P(x)\wedge Q(x))] \quad ; \quad [\forall x(P(x) \rightarrow\neg Q(x))] \rightarrow [\exists x(P(x)\wedge\neg Q(x))].$$

Tuttavia ciò è sbagliato almeno che non si assuma l'ulteriore ipotesi che esistano degli elementi che soddisfano P. Infatti, riferendoci alla prima implicazione, poniamo al posto di $P(x)$ un' asserzione del tipo $A(x)\wedge\neg A(x)$. Otteniamo

$$[\forall x((A(x)\wedge\neg A(x))\rightarrow Q(x))] \rightarrow [\exists x(A(x)\wedge\neg A(x)\wedge Q(x))].$$

D'altra parte la premessa $A(x)\wedge\neg A(x)$ dell'implicazione $A(x)\wedge\neg A(x)\rightarrow Q(x)$ risulta sempre falsa e quindi $[\forall x((A(x)\wedge\neg A(x))\rightarrow Q(x))]$ risulta vera. Possiamo allora concludere che il conseguente $\exists x(A(x)\wedge\neg A(x)\wedge Q(x))$ è vero. In particolare risulta vera $\exists x(A(x)\wedge\neg A(x))$, cosa palesemente assurda.

Nota. In effetti il punto di vista di Aristotele, pur essendo sbagliato da un punto di vista strettamente logico, è molto vicino alla intuizione comune. Infatti in generale si suppone che se si introduce una proprietà P in una conversazione, allora debba esistere almeno qualche oggetto che verifica tale proprietà. Se ad esempio dico "tutti gli operai stranieri della Fiat hanno il permesso di soggiorno" allora chi ascolta è portato a ritenere che esistono operai stranieri nella Fiat. Un tale modo di procedere viene chiamato da alcuni *implicatura*. Le implicature non riguardano il significato delle affermazioni che vengono fatte ma sono relative al contesto in cui si fanno tali affermazioni, contesto che si ritiene di tipo cooperativo. Se so che il mio interlocutore ha il desiderio di comunicare allora perché avrebbe dovuto mettere in gioco la nozione di "operai stranieri della Fiat" se non esistessero effettivamente tali operai ?

2. Solo 24 sillogismi su 256 sono validi !

Detto questo, Aristotele passa ad esaminare quelle che ritiene le forme possibili di ragionamento, cioè i sillogismi. Ecco un esempio di sillogismo come esposto da Aristotele:

«Se *A* si predica di ogni *B*, e se *B* si predica di ogni *C*, è necessario che *A* venga predicato di ogni *C*» (*Analitici primi* I.4, 25 b38-39).

In termini più semplici:

Se ogni B è A e se ogni C è B allora ogni C è A.

Come si vede un sillogismo deve avere due premesse e una conclusione e quindi deve avere la forma: «se *p* e *q*, allora *r*», dove le tre lettere *p*, *q*, *r* denotano tre proposizioni. In questo caso
- *p* viene chiamata "premessa maggiore"
- *q* viene chiamata "premessa minore"
- *r* viene chiamata "conclusione".

Una proposizione a sua volta ha una struttura del tipo *"... X* è *Y"* dove al posto dei puntini può apparire uno dei quattro tipi di quantificazione "ogni", "non ogni", "qualche", "nessuno". Nella notazione logica attuale utilizzeremo i simboli di quantificazione $\forall$ ed $\exists$ al modo seguente:

$\forall X$ (affermativa universale) ; $\neg\forall X$ (negativa universale)
$\exists X$ (affermativa particolare) ; $\neg\exists X$ (negativa particolare).

In base a tali considerazioni, Aristotele procede in modo sistematico ad analizzare tutte le possibili forme che potrebbe avere un sillogismo ed ad isolare fra queste quelle forme che danno luogo a sillogismi corretti.

Proposizione 2.1. Esistono 256 possibili sillogismi di cui solo 24 sono validi.

Dim. Indichiamo con "... *A è C*" la conclusione, di un sillogismo. Allora la forma generale di un sillogismo sarà del tipo

se ... X_1 è Y_1 e ... X_2 è Y_2, allora ... A è C

Tuttavia, perché sia possibile trarre la conclusione A è C le lettere A e C devono comparire in qualche modo nelle premesse. Tenendo conto che possiamo scambiare l'ordine delle due premesse, supponiamo che C compaia nella premessa maggiore "X_1 è Y_1" e che A compaia nella premessa minore "X_2 è Y_2" . Otteniamo quattro possibili forme

se ... X_1 è C e ... A è Y_2, allora ... A è C

se ... C è Y_1 e ... A è Y_2, allora ... A è C

se ... X_1 è C e ... X_2 è A, allora ... A è C

se ... C è Y_1 e ... X_2 è A, allora ... A è C

D'altra parte, riferendoci ad esempio alla prima forma, se le premesse non avessero qualche cosa in comune, cioè se X_1 fosse diverso da Y_2, non si vede nessun motivo che possa giustificare l'inferenza. Allora possiamo porre al posto di X_1 e Y_2 la lettera B. Lo stesso discorso può essere fatto per le altre forme di inferenza. In definitiva sono possibili solo le seguenti quattro «figure» del sillogismo [3]:

[3] Si deve sottolineare che Aristotele considerava solo "classi" mentre non venivano formalizzati ragionamenti che coinvolgevano elementi singoli. Ad esempio la famosissima forma di ragionamento: Socrate è un uomo, gli uomini sono mortali, quindi Socrate è mortale non è da considerarsi un sillogismo, almeno nel senso dato da Aristotele.

1. se ... *B* è *C* e ... *A* è *B*, allora ... *A* è *C*

2. se ... *C* è *B* e ... *A* è *B*, allora ... *A* è *C*

3. se ... *B* è *C* e ... *B* è *A*, allora ... *A* è *C*

4. se ... *C* è *B* e ... *B* è *A*, allora ... *A* è *C*

Queste quattro figure danno luogo ai vari sillogismi ponendo al posto dei puntini i quattro tipi di quantificazione. Facendo un po' i conti, poiché ogni figura ammette 4×4×4 = 64 diversi tipi di quantificazione in totale avremo 4×64 = 256 differenti sillogismi. Non rimane altro che esaminarli pazientemente uno ad uno per potere isolare quelli validi. Non faremo questo controllo piuttosto noioso ma è importante mettere in rilievo che il parlare di validità di un sillogismo è essenziale che vengano usate le variabili *A*, *B*, … Infatti possiamo dire che un sillogismo è valido se permette di passare da premesse vere a conclusioni vere qualunque sia l'interpretazione di tali variabili. [4]

Poiché nel medioevo Aristotele era considerato l'autore più importante ed autorevole, uno studente di quei tempi doveva ricordare tutti i sillogismi validi. Per aiutare la memoria si utilizzavano alcuni trucchi. Infatti ogni tipo di sillogismo veniva indicato da una parola latina, in cui le tre vocali indicano il tipo di quantificazione adottato. Precisamente

- la vocale *a* serve a ricordare "ogni",
- la vocale *e* serve a ricordare "nessuno",
- la vocale *i* serve a ricordare "qualche",
- la vocale *o* serve a ricordare "non ogni".

Ecco dunque l'elenco completo dei sillogismi validi:

1ª figura: barbara, darii, celarent, ferio, barbari, celaront

2ª figura: cesare, camestres, baroco, festino, cesaro, camestrop

3ª figura: darapti, datisi, disamis, felapton, ferison, bocardo

4ª figura: bamalip, camenes, fesapo, fresison, dimaris, camelop

Diamo ora un esempio per ciascuna delle quattro figure:

1. **barbara:** se ogni *B* è *C* e ogni *A* è *B*, allora ogni *A* è *C*

2. **camestres:** se ogni *C* è *B* e nessun *A* è *B*, allora nessun *A* è *C*

3. **felapton:** se nessun *B* è *C* e ogni *B* è *A*, allora non ogni *A* è *C*

4. **fresison:** se nessuno *C* è *B* e qualche *B* è *A*, allora non ogni *A* è *C*

[4] L'uso delle variabili *A*, *B*, *C* .. per denotare enti generici è una delle scoperte più feconde di tutti i tempi, che ha reso possibile lo sviluppo tanto della logica quanto della matematica. Solo tramite esse si possono infatti formulare in maniera semplice leggi universali, proprio quelle di cui Aristotele andava alla ricerca nella sua analitica. Per ritrovare un uso sistematico delle variabili in matematica bisogna attendere gli algebristi del 1600.

A questo punto, ovviamente, è possibile sostituire alle lettere qualsiasi nome: il ragionamento sarà sempre corretto, e, se le premesse saranno vere, si otterrà una conclusione vera (ovvero un «sillogismo dimostrativo»). Ecco un celebre esempio di un sillogismo barbara:

> «se ogni uomo è mortale ed ogni ateniese è uomo, allora ogni ateniese è mortale»

E' importante sottolineare il carattere sistematico e generale delle ricerche di Aristotele e dei suoi successori.

3. Il contributo degli stoici

Come abbiamo visto, in Aristotele il ruolo dei quantificatori è centrale. Pertanto la logica di Aristotele può essere vista come un capitolo di quello che sarà chiamata *logica dei predicati* oppure *logica del primo ordine*[5]. Gli stoici si occuparono invece di studiare il ruolo dei principali connettivi logici nelle varie forme di ragionamento. In altre parole si interessarono principalmente a quello che attualmente viene chiamato *calcolo proposizionale*. Studiarono inoltre alcune regole di inferenza quali il *Modus Ponens* e sue variazioni. Non si hanno molti documenti diretti degli stoici. Ecco ad esempio come ne parla Sesto empirico, un filosofo di indirizzo diverso.

> *Gli Stoici immaginano un gran numero di ragionamenti indimostrati, ma ne espongono specialmente questi cinque, ai quali sembrano ridursi tutti i rimanenti:*
>
> *1°) quello che dalla implicazione e dall'antecedente conclude il conseguente, come "Se è giorno, c'è luce. Ma è giorno. Dunque c'è luce.*
> (In termini attuali: *da* $\alpha\rightarrow\beta$ *ed* α *segue* β. Tale regola di inferenza viene chiamata *Modus ponens*).
>
> *2) Quello che dalla implicazione e dal contrario del conseguente conclude il contrario dell'antecedente, come: "Se è giorno, c'è luce. Ma non c'è luce. Dunque non è giorno".*
> (In termini attuali: *da* $\alpha\rightarrow\beta$ ed $\neg\beta$ segue $\neg\alpha$)
>
> *3) Quello che da un collegamento negativo e da una delle parti del collegamento conclude il contrario dell'altra parte, come "Non è giorno e notte. Ma è giorno. Dunque non è notte".*
> (Cioè: da $\neg(\alpha\wedge\beta)$ ed α, segue $\neg\beta$)
>
> *4) Quello che da un collegamento disgiuntivo e da una delle parti collegate conclude il contrario dell'altra, come "O è giorno o è notte. Ma è giorno. Dunque non è notte" .*
> (Cioè: da $\alpha\vee\beta$ ed α segue $\neg\beta$, da notare che ci si riferisce alla disgiunzione esclusiva)
>
> *5) Quello che da un collegamento disgiuntivo e dal contrario di una delle parti collegate conclude l'altra, come: "O è giorno, o è notte, ma non è notte. Dunque è giorno"*
> (Cioè: da $\alpha\vee\beta$ ed $\neg\alpha$ segue β)
>
> (Sesto Empirico: *Schizzi pirroniani*, II, 109-117).

Da notare che gli stoici non adottarono la notazione simbolica di Aristotele e che questo fu di

[5] In realtà Aristotele non considera la quantificazione nel senso attuale del termine. Le parole *ogni, alcuni* ... venivano adottate per indicare un rapporto tra concetti. Ad esempio l'affermazione *"ogni uomo è mortale"* indicava un rapporto tra la classe degli uomini e quella degli esseri mortali (in questo caso l'inclusione). Questo rapporto, come vedremo, sarà espresso da Boole in termini di equazioni. Una affermazione del tipo $\forall x\exists y(y^2=x)$ non potrebbe essere rappresentata nel formalismo di Aristotele.

forte impedimento allo sviluppo delle loro ricerche. Ad esempio se dovevano esprimere la regola del Modus Ponens che noi enunciamo col dire

da $\alpha \rightarrow \beta$ *ed* α *segue* β

esprimevano una tale regola dicendo

se il primo allora il secondo e se il primo, allora il secondo.

Scritta in questo modo la regola risulta di difficile lettura e di difficile uso. Si presentano le stesse difficoltà che, come vedremo nel prossimo paragrafo, si incontravano nell'algebra retorica.

4. Calcolo letterale e geometria analitica come tappe dello sviluppo della logica

Fino alla fine dell'ottocento la logica verrà identificata con l'approccio datone da Aristotele e quindi con la teoria dei sillogismi. Questo le impedirà di fare reali passi in avanti nonostante il fatto che fosse sistematicamente studiata (almeno fino agli inizi del 1600). Nel frattempo però è la matematica che effettua un balzo concettuale gigantesco e questo specialmente per quanto riguarda il ruolo del linguaggio. Infatti con lo sviluppo del calcolo letterale

<u>il linguaggio da semplice strumento per potere comunicare le idee di natura matematica, diviene oggetto di manipolazione e calcolo.</u>

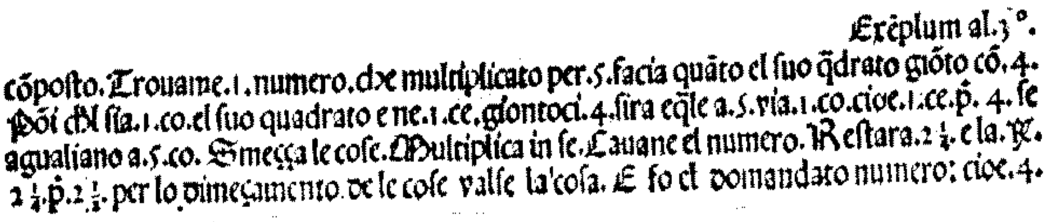
Si osservi che ancora nel 1500 lo studio delle equazioni algebriche era di tipo "retorico". Questo significava che la descrizione di una equazione veniva data nel linguaggio naturale, senza cioè l'uso di lettere per indicare l'incognita e lettere per indicare i coefficienti dei polinomi. Non era quindi possibile procedere ad una trattazione generale delle equazioni algebriche. Mancavano perfino simboli a noi familiari come +, -, = , x^2 ... Un esempio di algebra retorica è dato dal famoso sonetto in cui Tartaglia enuncia la regola risolutiva della equazione di terzo grado. Il sonetto comincia descrivendo l'equazione da risolvere:

Quando che il cubo con le cose appresso
Se agguaglia à qualche numero discreto
...

Versi questi che si "traducono" attualmente nell'equazione:

x^3	+	ax	=	n
cubo	con appresso	cose	agguaglia	a numero

Un altro esempio per renderci conto delle difficoltà che si dovevano affrontare per la mancanza di un linguaggio simbolico adeguato, è fornito dal seguente brano di un matematico italiano del tempo, Luca Pacioli (Borgo S. Sepolcro 1445 ca. -1514 ca.).


Exẽplum al.3°.
cõposto. Trouame.1.numero.che multiplicato per.5.facia quãto el suo q̃drato giõto cõ.4.
Poni ch'l sia.1.co.el suo quadrato e ne.1.ce.giontoci.4.sira eq̃le a.5.via.1.co.cioe.1.ce.p̃.4.se
agualiano a.5.co. Smeça le cose. Multiplica in se. Lauane el numero. Restara.2 ¼. e la.R.
2 ¼.p̃.2 ½. per lo dimeçamento de le cose valse la cosa. E fo el domandato numero: cioe.4.

Trascriviamo il brano letteralmente:

Exemplum al 3º composto.
Trovame 1 numero che multiplicato per 5 facia quanto el suo quadrato gionto con 4.
Poni ch'l sia 1 co.; el suo quadrato e ne 1 ce. giontoci 4 sirà equale a 5 via 1 co.; cioè 1 ce. p. 4 se aguagliano a 5 co.
Smezza le cose. Multiplica in sé. Lavane el numero. Restarà 2 1/4 e la R. 2 1/4 p. 2 1/2, per lo dimezzamento delle cose, valse la cosa. E fo el domandato numero: cioè 4.

Nel primo rigo Pacioli inizia con l'enunciare il problema:

Trovare un numero che moltiplicato per 5 sia uguale al suo quadrato più 4.

Si riferisce all'equazione $5x = x^2+4$ che però, in mancanza di un linguaggio algebrico enuncia chiamando l'incognita "la cosa", abbreviata in "1 co.", ed il quadrato dell'incognita (per noi x^2) con un altro nome, "censo", abbreviato in "1 ce." Non andiamo avanti nella descrizione di questo passo di Pacioli ma appare evidente la difficoltà che si incontra a giungere ad una trattazione delle equazioni algebriche quando non si usi un linguaggio algebrico appropriato[6].

Un forte passo avanti verso il moderno simbolismo fu fatto da Viète (Francia, 1540-1603) il quale usò lettere per rappresentare le incognite e lettere per rappresentare i coefficienti dei polinomi. Ciò ebbe due effetti positivi.
1. Liberò l’algebra dalla considerazione di equazioni particolari (cioè con particolari coefficienti) e quindi diede la possibilità sia di procedere in modo generale. Si osservi che prima del calcolo simbolico ogni equazione veniva considerata un caso a parte.
2. Creò un vero e proprio calcolo delle equazioni. Tale calcolo, che attualmente viene chiamato anche “sistema di riscrittura”, permette di passare da una equazione ad un'altra più semplice fino a giungere ad una equazione del tipo $x = m$ in cui l’incognita compare solo alla sinistra dell’equazione ed in maniera esplicita.

Quando appare la *Geometria* di Cartesio nel 1637 il calcolo simbolico dell’algebra ha raggiunto la sua piena maturità (per chi ha ricordi di liceo, Cartesio è quello del *cogito ergo sum*). In tale opera Cartesio inizia un sistematico processo di algebrizzazione della geometria che terminerà nella attuale geometria analitica. La geometria "sintetica" di Euclide, in cui le dimostrazioni giocano un ruolo centrale, viene tradotta da Cartesio in uno studio delle equazioni algebriche in cui tutti i problemi si riducono al calcolo delle radici di sistemi di equazioni algebriche. In un certo senso si passa dalle dimostrazioni con figure tipiche della geometria euclidea ai calcoli tipici dell’aritmetica. Scopo dichiarato di Cartesio è la ricerca di un metodo generale in contrasto con il modo frammentario con cui procedevano i greci antichi quando si trattava di trovare una dimostrazione o di risolvere un problema:

> *Quanto poi all'analisi degli antichi e all'algebra dei moderni . . . , la prima è sempre siffattamente legata alla considerazione delle figure, che essa non può esercitare l'intelligenza senza affaticare di molto l'immaginazione; e, nella seconda, ci si è talmente assoggettati a certe regole e a certe cifre, che se ne è fatta un'arte confusa ed oscura, la quale tiene imbarazzato lo spirito, invece di (essere) una scienza che lo coltivi.*

Se infatti è certamente un merito dei greci il fatto che ogni dimostrazione sia rigorosamente controllabile nei sui singoli passaggi, niente viene detto da essi circa il “metodo”, cioè l’algoritmo, che si dovrebbe seguire per poter trovare nuovi teoremi e dimostrazioni. Pertanto restiamo disarmati di fronte ad ogni problema nuovo che si presenta e dobbiamo ogni volta inventarci una soluzione.
Il metodo proposto da Cartesio per la geometria consisteva
- nell'indicare con lettere i dati e le incognite di un problema geometrico (introduzione di un inguaggio formale)

[6] Abbiamo visto invece come per Aristotele l'uso delle variabili per denotare proposizioni appaia completamente naturale.

- di tradurre le informazioni disponibili in equazioni (rappresentazione dell'informazione: un analogo del sistema di assiomi)
- nel semplificare, tramite calcoli algebrici, tali equazioni quanto più possibile fino a giungere a formule risolutive (processo deduttivo che in termini moderni corrisponde ai *rewriting systems*)
- nell'interpretare le formule risolutive in termini di calcolo dei segmenti.

Così, volendo risolvere qualsiasi problema, si deve innanzi tutto considerarlo come risolto, e si devono dare di nomi a tutte le linee che sembrano necessarie per la sua costruzione, sia quelle ignote, sia alle altre. Poi, senza fare alcuna differenza tra queste linee, note ed ignote, bisogna affrontare le difficoltà secondo l'ordine che mostra nella maniera più naturale in che modo tali linee siano in rapporto tra loro, fino a che non si sia trovato modo di esprimere una medesima quantità in due maniere diverse: ciò si chiama un'equazione (in una sola incognita) poiché i termini di una di queste due espressioni sono uguali a quelli dell'altra.

Da notare che Cartesio non amava molto la logica che identificava con la teoria dei sillogismi di Aristotele. Di più, la ricerca scientifica e filosofica di Cartesio è nata in esplicita opposizione alla filosofia di Aristotele. La logica veniva vista come qualcosa di sterile:

Quanto alla logica, i suoi sillogismi e la maggioranza dei suoi altri precetti sono utili piuttosto per la comunicazione di quanto già conosciamo . . . piuttosto che per l'investigazione di ciò che ci è sconosciuto. [7]

Tuttavia le idee di Cartesio costituiscono un passo importante verso
- l'assunzione di un nuovo ruolo del linguaggio e del calcolo simbolico
- la conseguente "algebrizzazione" e "meccanizzazione" del ragionamento.

Questi due punti sono alla base della moderna logica. Da notare che *La Geometria* non si presenta come un libro a se stante che abbia come unico scopo la ricerca di risultati scientifici su di un particolare argomento. La Geometria è una delle appendici del famoso *Discorso sul Metodo* del 1637 il cui titolo completo è
"Discorso sul metodo per ben condurre la propria ragione e cercare la verità nelle scienze".
Tale titolo si potrebbe tradurre in

"Discorso sulla logica"

purché alla parola logica si dia un significato più ampio. In ogni caso non è sbagliato considerare il lavoro di Cartesio come un passo significativo verso la logica matematica.

5. Leibniz: inutile affaticarsi a discutere, calcoliamo

Differentemente da Cartesio, il grande filosofo e matematico G. W. Leibniz condivideva in pieno le idee che stanno alla base della moderna logica. Egli era affascinato dal potere dell'algebra di meccanizzare gli argomenti geometrici a tal punto da fargli prefigurare una scienza ben più ampia. Tale scienza avrebbe operato con lo stesso metodo dell'algebra astratta ma sarebbe stata applicabile ai ragionamenti in tutti i campi della conoscenza razionale e non solo a quelli della geometria. Vediamo ad esempio che cosa dice Leibniz:

[7] Tale osservazione rimane in buona parte valida anche per la moderna logica che tuttavia non ha mai preteso di essere un metodo generale per trovare dimostrazioni di nuovi teoremi nel corpus tradizionale della matematica. La logica, in accordo con le idee di D. Hilbert, è nata come strumento di fondazione rigorosa della matematica, (attualmente della teoria degli insiemi). Successivamente lessa ha aperto nuovi affascinanti capitoli della ricerca scientifica come la teoria dei modelli, la teoria della calcolabilità, la dimostrazione automatica (intelligenza artificiale). Capitoli che si sono affiancati ai capitoli tradizionali della matematica

Ogni ragionamento umano si compie per mezzo di certi segni o caratteri ... le lingue ordinarie, sebbene servano al ragionamento, tuttavia sono soggette ad innumerevoli equivoci, né possono essere impiegate per il calcolo ... Questo mirabilissimo vantaggio finora lo danno soltanto i segni impiegati dagli aritmetici e dagli algebristi, nei quali ogni ragionamento consiste nell'uso di caratteri, e ogni errore mentale è lo stesso che un errore di calcolo ...
... mi apparve subito chiaro che tutti i pensieri umani possono risolversi del tutto in pochi pensieri da considerarsi come primitivi. Se poi si assegnano a questi ultimi dei caratteri, di qui si possono formare i caratteri delle nozioni derivate ...
...Una volta fatto questo, chiunque si servisse dei caratteri così descritti nel ragionare nello scrivere, o non commetterebbe mai errori, oppure li riconoscerebbe sempre da sé, siano suoi o degli altri, mediante esami facilissimi.
... una volta fatto ciò, quando sorgeranno delle controversie, non ci sarà maggior bisogno di discussione tra due filosofi di quanto ce ne sia tra due persone che effettuano calcoli. Sarà sufficiente, infatti, che essi prendano la penna in mano, si siedano ad un tavolino, e si di dicano reciprocamente "calcoliamo".

Leibniz pertanto suggerisce che il ragionamento si può ridurre ad un calcolo dei caratteri, cioè ad un calcolo in cui gli oggetti non sono più numeri ma parole, per la precisione parole di un linguaggio appositamente costruito.

Nel numero dei segni comprendo dunque le parole, le lettere, le figure della chimica, le figure astronomiche, cinesi, geroglifiche, le note musicali, i segni steganografici, aritmetici, algebrici e tutti quelli che usiamo al posto delle cose quando ragioniamo. I segni scritti o disegnati o scolpiti si chiamano invece "caratteri".

Mentre ero profondamente occupato in questo studio, mi venne inaspettatamente l'idea degna di nota che si potrebbe immaginare un alfabeto del pensiero umano e che ogni cosa potrebbe essere scoperta e distinta mediante la combinazione delle lettere di questo alfabeto e delle parole risultanti.

Le lingue ordinarie, sebbene siano assai utili al ragionamento, sono tuttavia soggette a innumerevoli equivoci e non possono sostituire il calcolo, in modo cioè che gli errori di ragionamento possano essere scoperti dalla stessa formazione e costruzione delle parole, come se si trattasse di solecismi e barbarismi. Ma questo mirabile vantaggio finora lo offrono i soli segni degli aritmetici e degli algebristi per i quali ogni ragionamento consiste nell'uso di caratteri e ogni errore mentale è lo stesso che un errore di calcolo.
(Leibniz, 1684?)

A me invero, mentre meditavo più profondamente su questo argomento, apparve manifesto che tutti i pensieri umani potevano risolversi completamente in pochi pensieri da ritenersi come primitivi. E che se si assegnano a questi ultimi dei caratteri, da essi si possono formare i caratteri delle nozioni derivate, dai quali sarà sempre possibile ricavare i loro requisiti e le nozioni primitive in essi racchiuse e, per dirla in una parola, le definizioni o valori, e quindi anche i rapporti derivabili dalle definizioni. Ora, una volta che ciò fosse realizzato, chiunque nel ragionamento e nello scrivere facesse uso di siffatti caratteri o non sbaglierebbe mai oppure riconoscerebbe da s´e i propri errori non meno di quelli degli altri mediante esami facilissimi; e scoprirebbe poi la verità nella misura in cui i dati lo renderebbero possibile, e se talora i dati non fossero sufficienti a trovare ciò che fosse richiesto egli potrebbe vedere quali esperienze *o quali notizie fossero necessarie per potersi almeno avvicinare alla verità quanto lo consentono i dati, sia procedendo per approssimazione, sia determinando il grado di maggiore probabilità · · ·(Leibniz, 1684?)*

· · · non è degno di uomini eccellenti perdere ore come schiavi nella fatica della computazione.

· · · E questo `e dunque il vantaggio del nostro metodo: che immediatamente possiamo stabilire per mezzo dei numeri se le proposizioni che ci vengono presentate sono provate o no; e che con la sola guida dei caratteri e con un metodo sicuro e veramente analitico, portiamo alla luce verità che altri avevano raggiunto a stento con immenso sforzo della mente e per caso. E perciò noi siamo in grado di presentare entro il nostro secolo dei risultati che altrimenti con difficoltà potrebbero fornire molte migliaia di anni. (Leibniz, 1679)

6. Algebra della logica: George Boole.

A differenza delle idee relative al calcolo differenziale, le idee Leibniz per la costruzione di un calcolo logico non ebbero molti sviluppi. Per un trovare un passo avanti della logica si dovranno aspettare le ricerche di carattere algebrico di George Boole, (1815–1864) pubblicate nel suo *The mathematical analysis of logic* del 1847. In tale scritto Boole presenta per la prima volta una vera e propria algebra della logica, un calcolo cioè interpretabile sia come calcolo delle classi (relativo alla logica aristotelica) sia come calcolo delle proposizioni (relativo alla logica stoica). Riferendosi alla logica di Aristotele, Boole indica con

- **1** il dominio di discorso,

- **0** la classe vuota

Inoltre se rappresenta con i simboli x ed y le due classi X ed Y allora rappresenta con:

- **1**- x la classe i cui membri non appartengono ad X

- $x \cdot y$ la classe i cui membri sono sia in X che in Y.

In questo modo può definire con equazioni algebriche le quattro forme di proposizione categorica aristotelica:

A Tutti gli X sono Y	$x \cdot y = x$
E Nessun X è Y	$x \cdot y = \mathbf{0}$
I Qualche X è Y	$x \cdot y \neq \mathbf{0}$
O Qualche X non è Y	$x \cdot (1-y) \neq \mathbf{0}$

(si ricordi che in teoria degli insiemi $X \subseteq Y$ se e solo se $X \cap Y = X$).

Una volta fatto ciò, Boole mostra come i sillogismi possano essere tradotti in termini di una semplice manipolazione di equazioni. Diamo qui un esempio di sillogismo (di tipo Barbara) trattato in termini di algebra booleana; :

SE *Tutti gli X sono Y . .*

(tradotto nell’equazione $x \cdot y = x$)

E *Tutti gli Y sono Z . .*

(tradotto nell’equazione $y \cdot z = y$)

ALLORA *Tutti gli X sono Z . .*

(tradotto nell’equazione $x \cdot z = x$).

Ma tale forma di ragionamento è traducibile nel calcolo seguente:

si moltiplichino entrambi i membri dell’equazione $y \cdot z = y$ per x ottenendo

$x \cdot (y \cdot z) = x \cdot y$

si applichi la proprietà associativa ottenendo

$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot y$

si sostituisca al posto di $x \cdot y$ il simbolo x ottenendo

$x \cdot z = x$.

Quest’ultima equazione esprime appunto la conclusione del sillogismo.

Boole espone successivamente in modo più compiuto le sue idee in *Indagine sulle leggi del pensiero* (1854) in cui propone il suo lavoro come una ricerca sulle leggi del pensiero, universali e valide per tutti. Tali leggi generali sono le proprietà di alcune operazioni tipiche dell'algebra e che sono comuni anche alla logica, e cioè:

1. $x \cdot y = y \cdot x$ Proprietà commutativa del prodotto

2. $x+y = y+x$ Proprietà commutativa della addizione

3. $z \cdot (x+y) = z \cdot x+z \cdot y$ Proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione.

4. $z \cdot (x-y) = z \cdot x-z \cdot y$ Proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto alla sottrazione.

5. Sostitutività di elementi uguali rispetto a moltiplicazione, addizione e sottrazione

se $x = y$ allora: $z \cdot x = z \cdot y$, $z+x = z+y$, $x-z = y-z$

Un po’ più particolare e la seguente legge

6. $x^2 = x$.

Tale legge non vale infatti per l’aritmetica usuale anche se vale per l’intersezione insiemistica (in quanto $X \cap X = X$) e nel calcolo proposizionale (in quanto $p \wedge p$ dice la stessa cosa di p).

7. Ma Boole non basta: Frege

Sia la teoria dei sillogismi che il calcolo di Boole presentano forti limiti. Ad esempio, il matematico e logico inglese August De Morgan (1847) osservò che i sillogismi non rappresentavano tutte le possibili forme di ragionamento e questo perché tale teoria non considerava la nozione di relazione (binaria) ma si limitava ai predicati monadici (cioè ad un solo posto). De Morgan osservò infatti che una semplice inferenza del tipo :

Tutti i cavalli sono animali

pertanto:

ogni testa di cavallo è una testa di animale

non rientrava tra i sillogismi di Aristotele. In questo caso sono coinvolti i predicati monadici *"cavallo"*, *"animale"*, e la relazione binaria *"essere la testa di"*. In termini attuali il ragionamento si rappresenterebbe con:

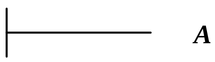
$cavallo(y) \rightarrow animale(y)$

pertanto, "aggiungendo" $testa(x,y)$

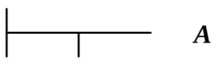
$testa(x,y) \wedge cavallo(y) \rightarrow (testa(x,y) \wedge animale(y))$.

D'altra parte nemmeno la proposta di Boole sembra poter rappresentare tale tipo di ragionamento in quanto anche Boole si limita ai predicati monadici.

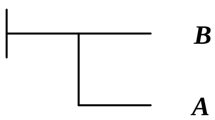
Più in generale una critica che veniva fatta alla proposta di Boole era quella di fornire un calcolo in cui mancava quel carattere di universalità tipico del progetto di Leibniz. Ricordiamo infatti che Leibniz voleva inventare una lingua artificiale ("characteristica universalis") che fosse affiancata ad un "calculus ratiocinator" e che fosse uno strumento universale valido per tutte le scienze. Il problema della costruzione di un linguaggio universale fu invece ripreso da Gottlob Frege con la sua *Ideografia* (1879) che segna la vera e propria nascita della logica. Frege inventa infatti un linguaggio con cui rappresentare tutte le asserzioni. Egli rappresentava una asserzione atomica A al modo seguente



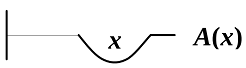
La negazione $\neg A$ di tale proposizione veniva indicata aggiungendo un tratto verticale



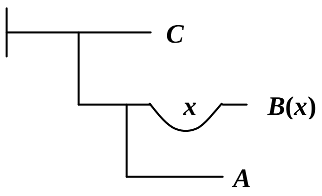
L'implicazione $A \rightarrow B$ veniva indicata al modo seguente



Un quantificazione universale $\forall xA$ era rappresentata scrivendo



Con questo tipo di formalismo una asserzione del tipo $(A \rightarrow \forall xB(x)) \rightarrow C$ doveva essere rappresentata al modo seguente



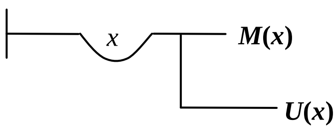
Come si vede si tratta di un linguaggio, "a due dimensioni" e di tipo grafico, piuttosto strano e difficile da maneggiare. Probabilmente ciò contribuì allo scarso successo che ebbe l'opera di Frege presso i matematici del tempo. La notazione moderna del tipo $(A\rightarrow \forall x B(x))\rightarrow C$ fu invece introdotta dal matematico e logico italiano Giuseppe Peano.

Naturalmente il contributo di Frege non si limitò alla definizione di tale linguaggio. Tra gli aspetti importanti dell'opera di Frege è ad esempio l'equiparazione dei "concetti" con le "funzioni". In base a tale equiparazione, ad esempio, il concetto di "essere un assassino", che in termini della logica formale attuale scriveremmo con *assassino*(x), ha un argomento x che quando viene sostituito da un particolare elemento dà come valore non un valore numerico (come per le normali funzioni matematiche), ma un "valore di verità". In altre parole Frege definisce il concetto come

"una funzione che ha come valore un valore di verità".

Questo modo di vedere ha varie conseguenze. La prima, è che, come non esiste differenza sostanziale tra una funzione di una variabile ed una funzione di due variabili, non esiste differenza sostanziale tra predicato monadico (ad un posto) ed una relazione binaria (a due posti). Inoltre l'interpretazione dei connettivi logici si traduce in un modo per manipolare funzioni. Ad esempio il simbolo $\rightarrow$ di implicazione denota una funzione che ha come argomenti (coppie di) valori di verità e come valore un valore di verità. Da Frege in poi si usa dunque interpretare i connettivi logici come simboli che denotano *"funzioni di verità"*.

Frege è poi passato alla storia come l'inventore dei quantificatori che permetterà il collegamento tra la logica proposizionale di tradizione stoica e la logica dei predicati di tradizione aristotelica. Ad esempio "tutti gli uomini sono mortali" si può riscrivere, con



cioè, in termini attuali $\forall x\, (U(x) \rightarrow M(x))$, espressione che si può leggere: "per tutte le x, se x è un uomo, allora x è mortale". Più in generale Frege presenta la tavola delle opposizioni aristotelica al modo seguente:

(A) tutti gli *F* sono *G* . . . . **(E) nessun *F* è *G***

$\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$ $\forall x\, (F(x) \rightarrow \neg G(x))$

(I) qualche *F* è *G* . . . .**(O) qualche *F* non è *G***

$\exists x\, (F(x) \wedge G(x))$ $\exists x(F(x) \wedge \neg G(x))$

Naturalmente il linguaggio di Frege permette molto di più della semplice traduzione del calcolo aristotelico. Ad esempio permette di esprimere in modo non ambiguo frasi in cui compare più di una espressione di generalità, cioè più di una quantificazione[8]. Ad esempio consideriamo una frase del tipo

"tutti i ragazzi amano una fanciulla" .

La sua interpretazione è ambigua. Infatti può essere interpretata sia come riferendosi ad una sola fanciulla che è amata da tutti i ragazzi sia come asserzione per cui ogni ragazzo ama una fanciulla che potrebbe essere diversa. Ora l’introduzione dei quantificatori permette di essere più precisi. Infatti se indichiamo con R la proprietà di essere ragazzo, con F la proprietà di essere ragazza e con *Ama*, la proprietà di amare, allora la frase può essere scritta

$\forall x(R(x)\rightarrow \exists y(F(y)\wedge Ama(x,y))$,

se si vuole intendere "per ogni ragazzo x esiste una ragazza y tale che x ama y". Invece, scrivendo

$\exists y(\forall x(R(x)\rightarrow Ama(x,y))$

intendiamo che "esiste una ragazza y che è amata da tutti i ragazzi".

8. Hilbert e la nascita della nuova logica

Buona parte della matematica è attualmente basata sulla teoria degli insiemi. Tuttavia la scoperta dei paradossi rese evidente che la nozione *ingenua* di insieme era alquanto inaffidabile e che quindi fosse necessario procedere ad una assiomatizzazione della relativa teoria. Furono pertanto proposte diverse teorie assiomatiche (la teoria dei tipi, la teoria delle classi, la teoria di Zermelo-Fraenkel) che permettono di evitare tutti i paradossi fino ad ora noti. Il problema che si presenta è se si possa essere sicuri che un giorno non vengano scoperti paradossi anche per tali nuove teorie, in altre parole se si possa essere sicuri della loro coerenza.

Ora Hilbert pensò che tutte le difficoltà nascessero dalla considerazione dell'infinito attuale (cioè degli insiemi infiniti) che già tanta diffidenza aveva suscitato da Pitagora in poi. Infatti, ad esempio, nessuno dubita della consistenza della teoria dei gruppi perché non è difficile fornire "concretamente" esempi di gruppi finiti. Esaminiamo in proposito un passo dall'articolo di Hilbert *Sull'infinito* apparso nel 1925. In questo passo viene fatto riferimento alla definizione di limite che aveva permesso di eliminare ogni riferimento alle grandezze infinitamente piccole ed a quelle infinitamente grandi.

> *Proprio come le operazioni sull'infinitamente piccolo sono state sostituite da operazioni sul finito che danno luogo esattamente agli stessi risultati e alle stesse eleganti relazioni formali, così in generale i metodi deduttivi basati sull'infinito devono essere sostituiti con procedimenti finiti che diano gli stessi risultati, che cioè rendano possibili le stesse catene di dimostrazioni e gli stessi metodi per ottenere formule e teoremi.*
> *Questo è lo scopo della mia teoria, essa si propone di dare definitivamente sicurezza al metodo matematico . . .*

[8] Il problema delle espressioni con generalità multipla era stato molto discusso nel medioevo e nel rinascimento senza trovare adeguata soluzione

D'altra parte l'esistenza dei paradossi della teoria degli insiemi sembra spingere al rifiuto dell'infinito attuale.

> 1. *Se c'è la più piccola speranza, esamineremo accuratamente tutte le definizioni e i metodi deduttivi fecondi, li cureremo, li potenzieremo e li renderemo utili. Nessuno potrà cacciarci dal paradiso che Cantor ha creato per noi.*
> 2. *Dobbiamo estendere a tutta la matematica quella sicurezza dei metodi dimostrativi che è propria della teoria elementare dei numeri, di cui nessuno dubita e in cui contraddizioni e paradossi sorgono solo per negligenza.*

D'altro lato è indiscutibile che il rigore e la sicurezza si possono ottenere solo facendo riferimento ai metodi finitari propri dei numeri interi. Come fare per conciliare le due cose apparentemente contraddittorie? Hilbert suggerisce di esaminare il concetto di "punto all'infinito" elaborato dalla geometria proiettiva. Come è noto, il piano proiettivo viene definito aggiungendo all'insieme dei punti del piano euclideo dei punti ideali, detti punti all'infinito in modo che si possa dire che due rette parallele abbiano un punto all'infinito in comune. Tecnicamente ciò si ottiene chiamando *punto all'infinito* ogni fascio completo di rette parallele e dicendo che un punto all'infinito P appartiene ad una retta r se r appartiene al fascio P. In tale modo si ottiene un potente ed elegante strumento per la trattazione delle curve algebriche. A tale proposito è importante osservare che non si pretende che i punti all'infinito siano realmente esistenti, essi sono strumenti linguistici, enti ideali la cui introduzione è utile per ottenere risultati e per avere una trattazione più efficace della geometria. Discorso analogo vale per l'introduzione dell'unità immaginaria i. La proposta di Hilbert è pertanto di considerare l'infinito un ente ideale, per meglio dire un oggetto linguistico da manipolare seconde certe regole, regole non solo di carattere algebrico ma anche di natura logica. In altre parole si tratta di spostare il ruolo del linguaggio che da strumento di indagine del mondo degli enti matematici diviene esso stesso oggetto di investigazione. Oggetto di studio dovranno essere i "segni concreti" che rimangono comunque oggetti finiti da maneggiare con un numero finito di regole.

> *Questa è la filosofia che ritengo necessaria non solo per la matematica ma per ogni pensiero, per ogni comprensione e per ogni comunicazione che rientrano nell'ambito della scienza. In base ad essa, in particolare, oggetto della nostra considerazione matematica sono gli stessi segni concreti la cui forma, in virtù del nostro approccio, è immediatamente chiara e riconoscibile.*

Fino a qui non esistono, come lo stesso Hilbert sottolinea, grandi differenze con la tradizione algebrica. Anche la semplice risoluzione di una equazione di primo grado consiste in una manipolazione di equazioni (oggetti linguistici) secondo certe regole che permettono di passare da una equazione ad un altra. Lo stesso si può dire anche di un semplice calcolo. La grossa novità nasce dal fatto che per "segni concreti" Hilbert intendeva non solo equazioni ma anche espressioni linguistiche molto più complicate che coinvolgevano i quantificatori, i connettivi logici (ad esempio la negazione, la congiunzione, la disgiunzione). Arriviamo pertanto al punto fondamentale: il calcolo logico.

> *Certo questo fu sviluppato in origine per motivi del tutto differenti. I suoi segni furono introdotti originariamente solo per scopi di comunicazione. Tuttavia è coerente col nostro punto di vista non attribuire alcun significato ai segni logici, così come non se ne è attribuito alcuno ai segni matematici, e dichiarare che anche le formula del calcolo logico sono elementi ideali che di per sé non significano niente. Col calcolo logico*

abbiamo un linguaggio simbolico che permette di tradurre in formule le asserzioni matematiche e di esprimere le deduzioni logiche mediante processi formali.

In definitiva non bastava ridurre la matematica a linguaggio, ma era anche necessario formalizzare la logica che permetteva la manipolazione di tale linguaggio. Più precisamente una particolare teoria matematica veniva vista come un insieme finito di espressioni linguistiche (gli assiomi propri della teoria) da aggiungere ad un insieme fissato di espressioni (gli assiomi logici) il tutto da manipolare tramite determinate regole (le regole di inferenza) in modo da produrre altre espressioni (i teoremi). In tale modo qualunque teoria (anche quelle che parlano di oggetti infiniti) diviene un oggetto finito e quindi passibile di essere esaminato nella sua interezza. Il problema della consistenza diviene allora quello di esaminare tale oggetto finito e vedere se tra le sue proprietà vi è anche quella della consistenza.

9. Logica ed intelligenza artificiale (da scrivere)