

ELEMENTI DI LOGICA
PER IL CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Prof. Giangiacomo Gerla
Dipartimento di Matematica ed Informatica

Università di Salerno

gerla@unisa.it

INTRODUZIONE

Sotto il termine di “logica” si intende una serie di studi, in ambito filosofico, matematico o informatico, che hanno come oggetto l’attività razionale dell’uomo. Tali studi si propongono di rispondere a domande del tipo:

- cosa è un ragionamento ?
- che significa dire che una asserzione è vera ?
- come si arriva a formulare una teoria valida ?
- come si riconosce un ragionamento sbagliato ?
- una macchina può essere dotata di razionalità ?

L’attività razionale si manifesta nell’uomo in vari modi. Ad esempio nel momento in cui a partire dall’esperienza si formula una teoria scientifica generale che permetta di prevedere e giustificare i fatti che accadono. Tale modo di procedere è tipico delle scienze sperimentali ed in particolare della fisica e la logica induttiva studia in quale modo questo avvenga. Oppure l’attività razionale si manifesta quando, a partire da una data teoria, che si accetta come vera, si effettuano dimostrazioni di nuovi teoremi. Un tale modo di procedere è tipico della matematica e la logica deduttiva studia il modo come questo viene fatto.

La logica deduttiva, di cui ci occuperemo in queste note è nata in ambito filosofico e le sue origini risalgono agli antichi greci in particolar modo ad Aristotele. Tuttavia, dagli inizi del novecento in poi, ed essenzialmente con il grande matematico Hilbert, la logica diventa un capitolo della matematica e per distinguerla dalle ricerche di tipo filosofico prenderà il nome di “logica formale” oppure “logica matematica”. In tale espressione il termine “matematica” ha una doppia valenza:

- serve ad indicare che il metodo adottato è di tipo matematico
- serve ad indicare che l’attenzione è rivolta esclusivamente ai ragionamenti in ambito matematico ed al mondo delle strutture matematiche.

Scopo dichiarato di Hilbert è quello di dare un fondamento sicuro alla matematica per poter evitare i paradossi della teoria degli insiemi. Tuttavia, oltre ad avere scopi “fondazionali” le ricerche di logica matematica sono attualmente volte anche alla trattazione generale delle strutture matematiche (teoria dei modelli) con particolare attenzione alle strutture algebriche.

Inoltre, un’altra fase è iniziata con lo sviluppo della moderna informatica e con l’esigenza di costruire calcolatori che simulino il più efficientemente possibile le attività umane. Esistono ad esempio linguaggi di programmazione come il Prolog in cui è possibile scrivere un sistema di assiomi e produrre automaticamente le conseguenze logiche che se ne possono trarre (purché il sistema non sia troppo complicato). La logica diventa allora un importante capitolo della Intelligenza Artificiale. Attualmente pertanto la logica matematica viene studiata da filosofi, matematici ed informatici.

Nota: Questi appunti sono in via di compilazione e ben lontani dall’essere completi. Chi trovasse errori o incongruenze (cosa probabile) è pregato di comunicarmelo. E’ possibile scaricarli, insieme ad altri testi di carattere didattico e scientifico dal mio sito <http://www.dmi.unisa.it/people/gerla/www/>. Si avvertono gli studenti del mio corso che non tutto quello che è riportato negli appunti fa parte del programma. Quindi si suggerisce di leggere il programma o prendere contatto con me. Inoltre gli appunti sono in continuo rifacimento e miglioramento. Pertanto si consiglia di scaricare sempre l’ultima versione.

INDICE

CAPITOLO 1 Un po' di storia

[cap. 1](#)

1. Il contributo di Aristotele
2. Solo 24 sillogismi su 256 sono validi !
3. Il contributo degli stoici
4. Calcolo letterale e geometria analitica come tappe dello sviluppo della logica
5. Leibniz: inutile affaticarsi a discutere, calcoliamo (da completare)
6. Algebra della logica: George Boole
7. Ma Boole non basta: Frege
8. Hilbert e la nascita della nuova logica
9. Logica ed intelligenza artificiale (da scrivere)

CAPITOLO 2

[cap. 2](#)

Strutture algebriche e relazionali.

1. Esempi di strutture algebriche: gruppi, reticoli ed algebre di Boole
2. La nozione generale di struttura algebrica e di omomorfismo
3. Esempi di strutture relazionali: relazioni d'ordine e di pre-ordine
4. Relazioni di equivalenza, partizioni e quozienti
5. La nozione generale di struttura relazionale e di omomorfismo
6. Congruenze e quozienti per le strutture algebriche
7. Congruenze e quozienti per le strutture relazionali
8. Omomorfismi e congruenze per insiemi ordinati e reticoli
9. Strutture del primo ordine ed altri tipi di strutture

CAPITOLO 3

[cap. 3](#)

Alcune nozioni universali

1. Sistemi di chiusura ed operatori di chiusura
2. Ulteriori proprietà
3. Teoremi di punto fisso per operatori algebrici
4. Sottostruttura di una struttura algebrica generata da un dato sottoinsieme
5. Congruenza in una struttura algebrica generata da una data relazione
6. Relazioni, giochi e labirinti
7. Parole e linguaggi come oggetti matematici: le grammatiche
8. I sistemi di riscrittura

CAPITOLO 4

[cap. 4](#)

Il calcolo proposizionale

1. Introduzione
2. Il linguaggio del calcolo proposizionale
3. La semantica del calcolo proposizionale
4. Il teorema di completezza funzionale: è inutile aggiungere connettivi logici
5. Sistemi di riscrittura per la forma normale disgiuntiva
6. Il metodo dei tableaux semantici: un esempio di intelligenza artificiale
7. Un approccio algebrico alla semantica del calcolo proposizionale
8. Logiche a più valori di verità

CAPITOLO 5

Il calcolo dei predicati

[cap. 5](#)

1. Linguaggi del primo ordine: alfabeto e termini
2. Linguaggi del primo ordine: le asserzioni
3. Cosa è la verità: interpretare un linguaggio
4. Interpretazione dei termini e delle formule
5. Formule logicamente vere ed equivalenze logiche
6. Un sistema di riscrittura per la forma normale prenessa
7. Skolemizzazione: come eliminare i quantificatori esistenziali
8. Conseguenze logiche
9. Logiche con uguaglianza
10. Estensione di una formula e proprietà definibili

CAPITOLO 6

[cap. 6](#)

Proprietà che si conservano: omomorfismi ed isomorfismi

1. Omomorfismi nella logica del primo ordine
2. Un automorfismo per le radici complesse di un polinomio
3. Proprietà che si conservano per isomorfismi: l'equivalenza elementare
4. Verificare se due strutture non sono isomorfe, calcolare il gruppo degli automorfismi
5. Principio di dualità in un'algebra di Boole
6. La classe dei modelli di una teoria non è un insieme
7. Proprietà che si conservano per omomorfismi che non sono necessariamente isomorfismi

CAPITOLO 7

[cap. 7](#)

Proprietà che si conservano: quozienti, prodotti diretti ed ultraprodotti

1. Congruenze, quozienti ed epimorfismi canonici
2. La prova del nove
3. Proprietà che si conservano per passaggio a quoziente
4. La logica monadica: la logica di Aristotele è decidibile
5. Prodotto diretto di due interpretazioni
6. Proprietà che si conservano per prodotti diretti: classi equazionali
7. Prodotto diretto di una qualunque famiglia di interpretazioni
8. Ultraprodotto: una costruzione che conserva tutte le proprietà
9. Applicazioni della teoria degli ultraprodotti
10. Ultraprodotti, infinitesimi ed infiniti (Leibniz aveva ragione)

CAPITOLO 8

[cap. 8](#)

Generare i teoremi di teorie semplici

1. Come costruire un sistema inferenziale corretto
2. Teorie con solo regole e fatti: la programmazione logica
3. Un semplice sistema inferenziale per i programmi
4. Modelli di Herbrand: mondi costruiti con parole
5. Un teorema di punto fisso per costruire modelli
6. Ad ogni interpretazione è possibile associare una interpretazione di Herbrand
7. Classi equazionali e strutture algebriche libere
8. Il metodo di risoluzione ed il Prolog (da scrivere)
9. Logica induttiva: teorie scientifiche come compressione dell'informazione

CAPITOLO 9

[cap. 9](#)

Generare i teoremi di una qualunque teoria

1. Altre regole di inferenza
2. Una condizione perché un sistema deduttivo sia sufficientemente potente
3. Ad ogni teoria è possibile associare una interpretazione di Herbrand
4. Il teorema di completezza di Gödel
5. Alcune conseguenze del teorema di completezza
6. Il sistema di assiomi di Peano per l'aritmetica
7. Il fallimento del programma di Hilbert: i teoremi limitativi di Gödel
8. La teoria degli insiemi ed il paradosso di Skolem
9. La deduzione come ricerca del minimo punto fisso

Appendice: Nomenclatura