Università degli Studi di Salerno
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali
Corso di laurea in Matematica

Tesi di Laurea Specialistica
in
Matematica

Bireticoli per il trattamento dell'informazione

Relatore:
Prof. Giangiacomo Gerla

Candidato:
Assuntina Cembalo
Matricola: 05212/00016

A.A. 2007/2008

Indice

Introduzione pag. 1

Capitolo 1

BIRETICOLI

1.1. Introduzione pag. 3
1.2. Bireticoli pag. 4
1.3. Bireticolo prodotto e teorema di rappresentazione pag. 7
1.4. Bireticoli per informazione positiva e negativa pag. 14
1.5. Esempi di bireticoli pag. 16
1.5.1. Four pag. 16
1.5.2. Presup pag. 19
1.5.3. Default pag. 22

Capitolo 2

BIRETICOLI INTERVALLI ED INFORMAZIONE MULTI-VALUED

2.1. Introduzione pag. 25
2.2. Costruzione generale pag. 26
2.3. Esempio pag. 30
2.4. Un teorema di isomorfismo pag. 31

Capitolo 3

BIRETICOLI ED INFORMAZIONE BOOLEANA

3.1. Le logiche a più valori pag. 34
3.2 Valutare con i bireticoli pag. 39
3.3. La semantica dei mondi possibili pag. 41
3.4 Il bireticolo dei mondi pag. 43
3.5. La chiusura per i bireticoli dei mondi pag. 45

Capitolo 4

ALGORITMI DI CHIUSURA E PUNTI FISSI

4.1. Operatore di deduzione e operatore di confutazione pag. 52
4.2 Teorema fondamentale sulle valutazioni chiuse pag. 55
4.3 Teorema di punto fisso pag. 58

Bibliografia pag. 63

Introduzione

La teoria dei bireticoli è nata per rappresentare due tipi diversi di relazione d'ordine nella valutazione delle asserzioni. Un ordine tiene conto del grado di verità che si attribuisce alla formula, un altro ordine tiene conto del grado di informazione disponibile. Tale teoria nasce dalla tradizione delle logiche polivalenti in cui si introducono valori di verità ulteriori rispetto a quelli classici 0 ed 1. Si ammette cioè che una proposizione possa non essere né vera né falsa, ma che abbia un valore di verità intermedio. In tali logiche si fissa un insieme V di valori di verità che si suppone essere un reticolo completo e si procede ad una valutazione delle formule assegnano in modo vero-funzionale ad ogni formula un valore in V. Il minimo 0 ed il massimo 1 hanno il ruolo di "vero" e "falso". Nella teoria dei bireticoli i valori di verità (sarebbe meglio dire le valutazioni delle asserzioni) sono coppie (x,y) di elementi di un reticolo in cui x rappresenta una misura dei motivi a favore della formula ed y una misura dei motivi contro. Ad esempio, la coppia (0,1) rappresenta il fatto che non esistono motivi a favore e tutti i motivi sono contro. In altri termini, tale coppia rappresenta "falso". La coppia (1,0) rappresenta per analoghi motivi "vero". La coppia (0,0) significa che non esistono né motivi a favore né motivi contro e rappresenta "sconosciuto", cioè la mancanza di informazione. La coppia (1,1) rappresenta il fatto che tutti i motivi sono a favore e tutti i motivi sono contro e rappresenta il fatto che l'informazione disponibile è contraddittoria. In generale si possono considerare anche casi intermedi.

La teoria dei bireticoli è stata proposta da Ginsberg nel 1988 come generalizzazione di una particolare struttura definita da Belnap nel 1977.

Questa tesi rappresenta lo sviluppo e l'approfondimento di argomenti affrontati nella mia precedente tesi triennale. Nella prima parte si forniscono le nozioni fondamentali della teoria dei bireticoli. In particolare si dimostra un teorema di rappresentazione dei bireticoli come "prodotto" di reticoli. Inoltre si espongono esempi di bireticoli particolarmente significativi per la logica matematica come FOUR, PRESUP, DEFAULT ed i bireticoli Booleani.

Nella seconda parte della tesi si esaminano per le logiche a valutazione in un bireticolo le nozioni base di conseguenza logica e di deduzione logica. Si introduce in proposito la nozione di “valutazione chiusa” ed in particolare si studia tale nozione in una classe speciale di bireticoli detti *bireticoli dei mondi possibili*. Sempre per tale classe, si dimostra un teorema di punto fisso che permette di calcolare le valutazioni chiuse generate da una data valutazione e che rappresenta l’analogo del processo di deduzione per le logiche considerate.

Capitolo 1
BIRETICOLI

1.1 Introduzione

I primi sistemi di logica polivalente, le cui origini remote possono essere fatte risalire fino ad Aristotele, furono sviluppati negli anni ’20 del secolo scorso grazie agli studi compiuti indipendentemente da Jan Lucasiewicz ed Emil Post, spinto da motivazioni filosofiche il primo, matematiche il secondo. Nei decenni successivi molti altri studiosi di primo piano hanno apportato il loro contributo a questo settore. Nello stesso spirito delle logiche polivalenti Ginsberg nel 1988 ha introdotto un’ampia famiglia di logiche basate sulla nozione di bireticolo ed in cui si tiene conto non solo della nozione di verità ma anche di quella di informazione.

Il sistema di Ginsberg rappresenta una generalizzazione di quello di Belnap (1977); quest’ultimo si serve, accanto a quelli classici, di due nuovi valori $\perp$ e $\top$, il primo dei quali indica la mancanza di informazione circa la validità di una asserzione, il secondo informazione che risulta contraddittoria. Il secondo valore può apparire intuitivamente poco plausibile, ma cessa di sembrarlo se si ricorda che in Intelligenza Artificiale non è infrequente che diverse sorgenti forniscano informazioni tra loro contradditorie cioè che una stessa proposizione può essere accreditata come vera in base ad una certa fonte di informazione, come falsa in base ad un’altra.

Ginsberg ha intuito la possibilità di generalizzare il sistema di Belnap, considerando i quattro valori utilizzati da quest’ultimo come altrettanti casi limite facenti parte di un sistema più ampio, non necessariamente finito, denominato bireticolo. La principale novità consiste nel considerare anche gli altri due valori di Belnap come il minimo ed il massimo relativi ad un ordinamento, questa volta basato, anziché sul grado di verità, sul grado di conoscenza.

Volendo esaminare più nei dettagli il sistema di Ginsberg, esso si basa sull'idea di associare alle proposizioni (che nell'ottica dell'Intelligenza Artificiale rappresentano credenze) valori di verità ordinati secondo due criteri: il "grado di verità " ed il "grado di conoscenza". Il primo ordinamento è semplicemente una generalizzazione dell'usuale ordinamento tra i valori classici, il *Vero* ed il *Falso.* Intuitivamente, più è alto (basso) il grado di verità di una proposizione, più si avvicina al Vero (al Falso). Il secondo criterio di ordinamento riflette invece la quantità di informazioni di cui si dispone circa una proposizione. In tale ordinamento il valore minimo è lo *Sconosciuto* il massimo è il *Contraddittorio*.
La struttura algebrica che permette di gestire contemporaneamente i due ordinamenti appena illustrati è stata battezzata da Ginsberg "bireticolo":si tratta essenzialmente di un insieme su cui sono definiti contemporaneamente due ordinamenti parziali,ciascuno dei quali dà origine ad un reticolo completo.

1.2. Bireticoli

Definizione 1.2.1. Un ***bireticolo*** è una struttura algebrica **B** = $(B,\wedge_1,\vee_1,0_1,1_1,\wedge_2,\vee_2,0_2,1_2)$ tale che B sia un insieme non vuoto e $\mathbf{B_1}=(B,\wedge_1,\vee_1,0_1,1_1)$ e $\mathbf{B_2}=(B,\wedge_2,\vee_2,0_2,1_2)$ siano reticoli limitati.

Chiamiamo *negazione* su **B** una operazione unaria ¬ su B soddisfacente le condizioni:

1) $\neg\neg x=x$,

2) $\neg(x\vee_1 y)= \neg x \wedge_1\neg y$, $\neg(x\wedge_1 y)= \neg x \wedge_1\neg y$, (Leggi di De Morgan)

3) $\neg(x\vee_2 y)= \neg x \vee_2\neg y$, $\neg(x\wedge_2 y)= \neg x \wedge_2\neg y$.

L'ordinamento corrispondente al reticolo limitato $\boldsymbol{B_1}$ può essere denotato con $\leq_1$ mentre quello corrispondente a $\boldsymbol{B_2}$ può essere chiamato $\leq_2$; spesso il bireticolo $\boldsymbol{B}$ è scritto nella forma $(B,\leq_1,\leq_2)$ dove $\boldsymbol{B_1}=(B,\leq_1)$ e $\boldsymbol{B_2}=(B,\leq_2)$ sono reticoli completi.

Si noti che in letteratura esistono diverse definizioni di bireticolo, spesso non equivalenti. Ad esempio quello che abbiamo chiamato bireticolo a volte viene chiamato pre-bireticolo mentre prende il nome di bireticolo un pre-bireticolo dotato di negazione (ad esempio si veda Fitting [*Kleene's Logic Generalized*, 16 Maggio 1991]).

Proposizione 1.2.1. Se il bireticolo **B** ha una negazione questa è tale che:

$$\text{(i)}\quad x \leq_1 y \Leftrightarrow \neg y \leq_1 \neg x \quad \forall x,y \in B;$$

$$\text{(ii)}\quad x \leq_2 y \Leftrightarrow \neg x \leq_2 \neg y \quad \forall x,y \in B.$$

Inoltre , $\neg : (B,\wedge_1,\vee_1)\rightarrow (B,\vee_1,\wedge_1)$ e $\neg : (B,\wedge_2,\vee_2)\rightarrow (B,\wedge_2,\vee_2)$ sono isomorfismi di reticoli. Questo implica immediatamente che $\neg 0_1=1_1$, $\neg 1_1=0_1$ mentre $\neg 0_2=0_2$ e $\neg 1_2=0_2$.

Ogni singolo reticolo $\boldsymbol{L}=(L,\leq)$ determina due bireticoli $\boldsymbol{L}^+ =(L,\leq,\leq)$ e $\boldsymbol{L}^- = (L,\geq,\leq)$ in modo banale. Utilizzando le notazioni algebriche, se $\boldsymbol{L}=(L,\wedge,\vee,0,1)$,allora $\boldsymbol{L}^+ =(L, \wedge,\vee,0,1,\wedge,\vee,0,1)$ e $\boldsymbol{L}^- =(L,\vee,\wedge,1,0,\wedge,\vee,0,1)$.

I due più semplici esempi di bireticoli banali senza negazione sono i bireticoli TWO^+ e TWO^-,dove TWO è un reticolo di due elementi.

Il più semplice esempio di bireticolo non banale con negazione è il bireticolo FOUR che è la rappresentazione algebrica della logica a quattro valori di Belnap.

Definizione 1.2.2. Siano B_1 e B_2 due bireticoli. Una funzione $f : B_1 \rightarrow B_2$ è detta *isomorfismo di bireticoli* se è una biezione che conserva tutte le operazioni dei bireticoli inclusa la negazione se è presente.

Se B_1 e B_2 sono isomorfi , scriveremo $B_1 \cong B_2$.

Fino ad ora non è stata imposta alcuna condizione che metta in relazione i due ordinamenti di un bireticolo. Consideriamo ora due possibili condizioni che collegano invece i due ordinamenti.

Definizione 1.2.3. Un bireticolo **B** (con o senza negazione) è detto ***allacciato*** se ciascuno dei $\wedge_1,\vee_1,\wedge_2,\vee_2$ è monotono rispetto ad entrambi gli ordinamenti $\leq_1$ e $\leq_2$, cioè

1. $x \leq_1 y \Rightarrow x \wedge_2 z \leq_1 y \wedge_2 z$ e $x \vee_2 z \leq_1 y \vee_2 z$
2. $x \leq_2 y \Rightarrow x \wedge_1 z \leq_2 y \wedge_1 z$ e $x \vee_1 z \leq_2 y \vee_1 z$

Definizione 1.2.4. Un bireticolo **B** (con o senza negazione) si dice *distributivo* se per ogni $\Diamond,\Box \in \{\wedge_1,\vee_1,\wedge_2,\vee_2\}$ e per ogni $x,y,z \in B$ si ha che

$$x \Diamond (y \Box z) = (x \Diamond y) \Box (x \Diamond z)$$

E’ possibile dimostrare la seguente proposizione.

Proposizione 1.2.2. Ogni bireticolo distributivo è allacciato.

I bireticoli $\boldsymbol{L}^+$ e $\boldsymbol{L}^-$ sono allacciati per ogni reticolo L.

1.3. Bireticolo prodotto e teorema di rappresentazione

Definizione 1.3.1. Siano **L** = $(L,\wedge,\vee,0,1)$ e **L’** = $(L',\wedge',\vee',0',1')$ due reticoli limitati. Si definisce $B(\mathbf{L},\mathbf{L}')=(L\times L',\cap_1,\cup_1,\perp_1,\top_1,\cap_2,\cup_2,\perp_2,\top_2,)$ nel modo seguente :

$\forall\ (x,x'), (y,y') \in L \times L'$,

$(x,x') \cap_1 (y,y') = (x \wedge y ,x' \vee' y')$, $\quad (x,x') \cup_1 (y,y') = (x \vee y ,x' \wedge' y')$

$(x,x') \cap_2 (y,y') = (x \wedge y ,x' \wedge' y')$, $\quad (x,x') \cup_2 (y,y') = (x \vee y ,x' \vee' y')$

$\perp_1 = (0,1')$, $\top_1 =(1,0')$, $\perp_2 =(0,0')$, $\top_2 =(1,1')$

$B(\mathbf{L},\mathbf{L}')$ è detto ***bireticolo prodotto*** associato con **L** ed **L**’.

Nei bireticoli prodotto non è difficile introdurre una operazione che poi proveremo essere una negazione

Se $h: L \rightarrow L'$ è un omomorfismo di reticoli possiamo definire nel bireticolo prodotto l'operazione

$$\sim(x,x')=(h^{-1}(x'),h(x)).$$

In particolare possiamo considerare come omomorfismo l'applicazione identica. In tale caso la negazione assumerà la semplice forma

$$\sim(x,x')=(x',x).$$

$B(\boldsymbol{L},\boldsymbol{L}')$ con l'operazione ~ aggiunta è denotato con $B_h(\boldsymbol{L},\boldsymbol{L}')$. Per ogni reticolo limitato ***L*** scriviamo $B(\boldsymbol{L})$ al posto di $B_h(\boldsymbol{L},\boldsymbol{L})$,dove h è l'automorfismo identità su ***L.*** $B(\boldsymbol{L})$ è chiamato ***bireticolo quadrato*** *con negazione* associato ad **L.**

Il bireticolo prodotto con negazione associato al reticolo costituito da due elementi ed assumendo come omomomorfismo l'identità è *Four*

Teorema 1.3.1. Siano L ed L' due reticoli limitati, allora:

1) B(**L**,**L**') è un bireticolo allacciato. Inoltre B(**L**,**L**') è distributivo se e solo se **L** e **L**' sono entrambi distributivi.
2) B(**L**) è un bireticolo allacciato con negazione. Inoltre B(**L**) è distributivo se e solo se **L** è distributivo.

Teorema 1.3.2. (di rappresentazione)

1) Per ogni bireticolo allacciato **B**, esiste una coppia **L**,**L'** di reticoli limitati tale che **B** $\cong$ B(**L**,**L**').

2) Per ogni bireticolo allacciato con negazione **B**, esiste un reticolo limitato **L** tale che **B** $\cong$ B(**L**).

La dimostrazione del teorema 2 richiede la seguente definizione e il seguente lemma.

Definizione 1.3.2. Sia **B**= (B,$\leq_1$,$\leq_2$) un bireticolo allacciato. Un elemento x $\in$ B è chiamato *positivo* se $\forall$ y $\in$ B x $\leq_1$y implica x $\leq_2$y. Esso è detto *negativo* se $\forall$ y $\in$ B y $\leq_1$x implica x $\leq_2$y. Chiamiamo POS(**B**) e NEG(**B**) gli insiemi costituiti rispettivamente dagli elementi di **B** positivi e negativi.

Lemma 1.3.1. Sia **B** un bireticolo allacciato. Allora si ha che :

1. POS(**B**) = $[0_2,1_1]_{\leq 1} = [0_2,1_1]_{\leq 2}$
2. NEG(**B**) = $[0_2,0_1]_{\geq 1} = [0_2,0_1]_{\leq 2}$

Dimostrazione.

Supponiamo che $x \in [0_2,1_1]_{\leq 1}$ e $x \leq_1 y$. Allora $0_2 \leq_1 x \leq_1 y$. Quindi $0_2 \vee_1 x = x$ e $y \vee_1 x = y$. Da $0_2 \leq_2 y$ e dalla monotonicità di $\vee_1$ rispetto a $\leq_2$ abbiamo che $0_2 \vee_1 x \leq_2 y \vee_1 x$ da cui x $\leq_2 y$. Quindi $x \in POS(\boldsymbol{B})$.

Supponiamo ora che x sia positivo. Allora da $x \leq_1 1_1$ otteniamo $0_2 \leq_2 x \leq_2 1_1$, da cui $x \in [0_2,1_1]_{\leq 2}$. Infine consideriamo $x \in [0_2,1_1]_{\leq 2}$. Da $x \leq_2 1_1$ otteniamo $1_1 \wedge_2 x = x$ e da $0_2 \leq_1 1_1$ abbiamo $0_2 \wedge_2 x \leq_1 1_1 \wedge_2 x$. Quindi $0_2 \leq_1 x$ da cui $x \in [0_2,1_1]_{\leq 1}$. Dunque $[0_2,1_1]_{\leq 1} \subseteq POS(\boldsymbol{B}) \subseteq [0_2,1_1]_{\leq 2} \subseteq [0_2,1_1]_{\leq 1}$.

Abbiamo così provato la prima parte del lemma. La seconda parte si prova allo stesso modo.

Una conseguenza della prima parte di questo lemma è che $([0_2,1_1]_{\leq 1}, \leq 1)$ e $([0_2,1_1]_{\leq 2},\leq 2)$ sono reticoli identici. Chiamiamo questo reticolo ***POS*(*B*).** Similmente poniamo ***NEG*(*B*)** $= ([0_2,0_1]_{\geq 1},\geq_1) = ([0_2,0_1]_{\leq 2},\leq_2)$. Nel caso in cui ***B*** ha la negazione, ¬ (quando ristretto a *POS*(***B***)) è un isomorfismo tra ***POS*(*B*)** e ***NEG*(*B*)**. Notiamo che ***POS*(*B*)**$^+$ = (*POS*(***B***),$\leq_2$,$\leq_2$) e ***NEG*(*B*)**$^-$ = (*NEG*(***B***),$\geq_2$,$\leq_2$).

Come corollario del lemma abbiamo la seguente caratterizzazione degli elementi positivi e negativi di un bireticolo allacciato in termini della sua rappresentazione come il bireticolo prodotto associato ai reticoli limitati ***L*,*L'*.**

Corollario 1.3.1. Siano **L** e **L'** reticoli limitati,e siano 0 e 0' i rispettivi elementi minimi. Un elemento x di B(**L**,**L'**) è positivo se e solo se x = (y,0'), per qualche y ∈ L, ed è negativo se e solo se x = (0,y') , per qualche y' ∈ L'.

Dimostrazione.

Sia $B(\boldsymbol{L},\boldsymbol{L}') = (L\times L', \subseteq_1,\subseteq_2)$.E' semplice verificare che $[\bot_2, \top_1]_{\subseteq 2} = L\times\{0'\}$ e $[\bot_2, \bot_1]_{\subseteq 2} = \{0\}\times L'$.

Dimostrazione del teorema di rappresentazione.

Parte 1. Mostreremo che $\boldsymbol{B} \cong B(\boldsymbol{POS}(\boldsymbol{B}), \boldsymbol{NEG}(\boldsymbol{B}))$.

Sia $B(\boldsymbol{POS}(\boldsymbol{B}), \boldsymbol{NEG}(\boldsymbol{B})) = (POS(\boldsymbol{B}) \times NEG(\boldsymbol{B}), \cap_1,\cup_1,\bot_1, \top_1,\cap_2,\cup_2,\bot_2, \top_2)$.

Allora $\forall\ (x,x'),(y,y') \in POS(\boldsymbol{B}) \times NEG(\boldsymbol{B})$,

$(x,x') \cap_1 (y,y') = (x \wedge_2 y, x'\vee_2 y') = (x \wedge_1 y, x'\wedge_1 y')$,

$(x,x') \cup_1 (y,y') = (x \vee_2 y, x' \wedge_2 y') = (x \vee_1 y, x' \vee_1 y')$,

$(x,x') \cap_2 (y,y') = (x \wedge_2 y, x' \wedge_2 y') = (x \wedge_1 y, x' \vee_1 y')$,

$(x,x') \cup_2 (y,y') = (x \vee_2 y, x' \vee_2 y') = (x \vee_1 y, x' \wedge_1 y')$.

$\perp_1 = (0_2, 0_1)$, $\top_1 = (1_1, 0_2)$, $\perp_2 = (0_2, 0_2)$ $\top_2 = (1_1, 0_1)$.

Notiamo che B(***POS*(*B*), *NEG*(*B*)**) = $\boldsymbol{POS(B)^{+} \times NEG(B)^{-}}$ **,** dove “×” denota l’ordinario prodotto diretto di bireticoli.

Per ogni $x \in B$ definiamo

$$f(x) = (x \wedge_2 1_1, x \wedge_2 0_1).$$

Dal lemma 1, $f : B \to POS(\boldsymbol{B}) \times NEG(\boldsymbol{B})$. Mostreremo che f è un isomorfismo tra ***B*** e B(***POS*(*B*), *NEG*(*B*)**). A tal proposito proviamo prima che ,
per ogni $x \in B$, $x = (x \wedge_2 1_1) \vee_2 (x \wedge_2 0_1)$. (*)

Banalmente $x \leq_1 1_1$. Poiché per ipotesi il bireticolo è allacciato , $x \leq_1 x \wedge_2 1_1$. Per lo stesso motivo otteniamo che $x = x \vee_2 (x \wedge_2 0_1) \leq_1 (x \wedge_2 1_1) \vee_2 (x \wedge_2 0_1)$. Banalmente $0_1 \leq_1 x$. Così $x \wedge_2 0_1 \leq_1 x$. Quindi $(x \wedge_1 1_1) \vee_2 (x \wedge_2 0_1) \leq_1 (x \wedge_2 1_1) \vee_2 x = x$. Si ha allora $x \leq_1 (x \wedge_2 1_1) \vee_2 (x \wedge_2 0_1) \leq_1 x \Rightarrow x = (x \wedge_2 1_1) \vee_2 (x \wedge_2 0_1)$.

Dalla (*) segue immediatamente che f è iniettiva,infatti
$f(x) = f(y) \Rightarrow (x \wedge_2 1_1, x \wedge_2 0_1) = (y \wedge_2 1_1, y \wedge_2 0_1) \Rightarrow x \wedge_2 1_1 = y \wedge_2 1_1$ e $x \wedge_2 0_1 = y \wedge_2 0_1 \Rightarrow x = (x \wedge_2 1_1) \vee_2 (x \wedge_2 0_1) = (y \wedge_2 1_1) \vee_2 (y \wedge_2 0_1) = y \Rightarrow x = y$

Per dimostrare la suriettività consideriamo un qualsiasi $(x,y) \in POS(\boldsymbol{B}) \times NEG(\boldsymbol{B})$. Notiamo che $y \leq_1 0_2 \leq_1 x$. Così $x \vee_2 y \leq_1 x \vee_2 x = x$, e quindi $(x \vee_2 y) \wedge_2 1_1 \leq_1 x \wedge_2 1_1 = x$; l’ultima uguaglianza è dovuta al fatto che x è positiva, e così $x \leq_2 1_1$. Dall’altra parte, da $x \leq_1 1_1$ otteniamo anche $x = (x \vee_2 y) \wedge_2 x$

$\leq_1 (x \vee_2 y) \wedge_2 1_1$. Così abbiamo $(x \vee_2 y) \wedge_2 1_1 = x$, e allo stesso modo possiamo mostrare che $(x \vee_2 y) \wedge_2 0_1 = y$. Quindi $f(x \vee_2 y) = ((x \vee_2 y) \wedge_2 1_1, (x \vee_2 y) \wedge_2 0_1)) = (x, y) \Rightarrow f$ è suriettiva.

Abbiamo dimostrato che f è una biezione tra i due bireticoli $\boldsymbol{B}$ e $B(\boldsymbol{POS(B)}, \boldsymbol{NEG(B)})$.

Per provare che f è un isomorfismo di bireticoli è sufficiente mostrare che conserva i due ordinamenti di reticolo.
Dalla costruzione di $B(\boldsymbol{POS(B)}, \boldsymbol{NEG(B)})$ segue che, $\forall$ $(x,x'), (y,y') \in POS(\boldsymbol{B}) \times NEG(\boldsymbol{B})$

$$(x,x') \subseteq_1 (y,y') \Leftrightarrow x \leq_1 y \text{ e } x' \leq_1 y' ,$$
$$(x,x') \subseteq_2 (y,y') \Leftrightarrow x \leq_2 y \text{ e } x' \leq_2 y'.$$

Consideriamo $x,y \in B$ con $x \leq_1 y$. Dall' ipotesi di bireticolo allacciato $(x \wedge_2 1_1) \leq_1 (y \wedge_2 1_1)$ e $(x \wedge_2 0_1) \leq_1 (y \wedge_2 0_1)$, che è equivalente a $f(x) \subseteq_1 f(y)$. Allo stesso modo $x \leq_2 y$ implica $(x \wedge_2 1_1) \leq_2 (y \wedge_2 1_1)$ e $(x \wedge_2 0_1) \leq_2 (y \wedge_2 0_1)$, e quindi $f(x) \subseteq_2 f(y)$.

Parte 2. Supponiamo ora che $\boldsymbol{B}$ abbia la negazione $\neg$. Mostriamo che $\boldsymbol{B} \cong B(\boldsymbol{POS(B)})$ $(\cong B(\boldsymbol{NEG(B)})$) . Ricordiamo che la negazione $\neg$ (ristretta a $POS(\boldsymbol{B})$) è un isomorfismo tra i reticoli $\boldsymbol{POS(B)}$ e $\boldsymbol{NEG(B)}$. Denotiamo con $\sim$ la negazione di $B_\neg(\boldsymbol{POS(B)}, \boldsymbol{NEG(B)})$. Allora $\forall$ $(x,x') \in POS(\boldsymbol{B}) \times NEG(\boldsymbol{B})$

$$\sim(x,x') = (\neg x', \neg x).$$

E' facile mostrare che la funzione $(a,b) \rightarrow (a,\neg b)$ è un isomorfismo tra i due bireticoli con negazione $B_\neg(\boldsymbol{POS(B)}, \boldsymbol{NEG(B)})$ e $B(\boldsymbol{POS(B)})$. Per provare il teorema è sufficiente mostrare che $B \cong B_\neg(\boldsymbol{POS(B)}, \boldsymbol{NEG(B)})$ e $B(\boldsymbol{POS(B)})$; per mostrare ciò rimane solo da verificare che f conserva la negazione.

$$
\begin{aligned}
\sim f(x) &= \sim (x \wedge_2 1_1, x \wedge_2 0_1) \\
&= (\neg (x \wedge_2 0_1), \neg (x \wedge_2 1_1)) \\
&= (\neg x \wedge_2 \neg(0_1), \neg x \wedge_2 \neg(1_1)) \\
&= (\neg x \wedge_2 1_1, \neg x \wedge_2 0_1) \\
&= f(\neg x).
\end{aligned}
$$

Questo completa la dimostrazione del teorema di rappresentazione.

Notiamo che come corollario della dimostrazione abbiamo che

$$B \cong \boldsymbol{POS(B)}^{+} \times \boldsymbol{NEG(B)}^{-},$$

per ogni bireticolo allacciato ***B***.

Corollario 1.3.2.

1) Una algebra **B** è un bireticolo distributivo se e solo se esistono due reticoli limitati e distributivi **L**, **L’** tale che **B** ≅ B(**L**,**L’**).
2) **B** è un bireticolo distributivo con negazione se e solo se esiste un reticolo limitato e distributivo **L** tale che **B** ≅ B(**L**).

1.4. Bireticoli per informazione positiva e negativa

In ambito logico i due ordinamenti, $\leq_1$ e $\leq_2$, sono spesso denotati con $\leq_t$ e $\leq_k$: in questo caso, infatti, B rappresenta l'informazione possibile sui valori di verità delle formule, $\leq_t$ è la relazione che corrisponde al grado di verità e $\leq_k$ quella relativa al grado di conoscenza.

Dato che i reticoli $(B,\leq_t)$ e $(B,\leq_k)$ sono completi,vi saranno un massimo ed un minimo per entrambi gli ordinamenti: il che significa che in ogni bireticolo vi saranno almeno quattro elementi.

Il massimo ed il minimo rispetto a $\leq_t$ sono naturalmente il *Vero* ed il *Falso*,che indicheremo con i simboli **V** e **F**. Il massimo d'informazione corrisponde,come già detto, ad una proposizione di cui sono state provate tanto la verità che la falsità e sarà quindi chiamato *Contraddittorio* (simbolo $\top$), mentre il minimo,che rappresenta una completa assenza di informazioni, lo chiameremo *Sconosciuto* (simbolo $\perp$).

La funzione ¬ rappresenta una generalizzazione della negazione classica.

La condizione $x \leq_1 y \Leftrightarrow \neg y \leq_1 \neg x \quad \forall x,y \in B$ corrisponde all'intuizione che maggiore è la verità di una proposizione, minore sarà quella della sua negazione.

La condizione $x \leq_2 y \Leftrightarrow \neg x \leq_2 \neg y \quad \forall x,y \in B$ stabilisce che la negazione lasci invariato l'ordine della conoscenza: questo perché sembra ragionevole che le informazioni di cui disponiamo circa una proposizione siano le stesse quelle riguardanti la sua negazione. Dunque, se si hanno buone prove della verità di una proposizione, se ne avranno altrettanto buone della falsità della sua negazione.

La condizione per cui $\neg\neg x=x \ \forall x\in B$ impone soltanto che la legge della doppia negazione valga anche nell'ambito polivalente.

I connettivi $\wedge_1,\vee_1,\wedge_2,\vee_2$ vengono indicati con $\wedge$, $\vee$, $\cdot$, $+$ e sono chiamati rispettivamente *congiunzione*, *disgiunzione*, *prodotto* e *somma*. In ambito logico operano su proposizioni e ad ognuno di essi è associata una delle operazioni del bireticolo che ne determina il comportamento.

Congiunzione (simbolo $\wedge$) Corrisponde all'estremo inferiore relativo a $\leq_t$:

$$p\wedge q = \inf_t\{ v(p),v(q) \}$$

dove p e q sono due proposizioni.

Disgiunzione (simbolo $\vee$) Corrisponde all'estremo superiore relativo a $\leq_t$:

$$p\vee q = \sup_t\{ v(p),v(q) \}$$

Prodotto (simbolo $\cdot$). Corrisponde all'estremo inferiore relativo a $\leq_k$:

$$p\cdot q = \inf_k\{ v(p),v(q) \}$$

La versione infinitaria verrà indicata con il simbolo $\prod$; il prodotto opera rispetto all'ordinamento della conoscenza esattamente come la congiunzione rispetto a quello della verità:viene chiamato anche operatore "di accordo" perché intuitivamente $p \cdot q$ rappresenta il massimo ammontare di informazioni condivise da p e da q.

Somma (simbolo +) . Corrisponde all'estremo superiore relativo a $\leq_k$:

$$p+q = \sup_k\{ v(p),v(q) \}$$

La versione infinitaria verrà indicata con il simbolo $\sum$. La somma corrisponde allora disgiunzione per l'ordinamento della conoscenza: intuitivamente $p+q$ rappresenta la "somma " delle informazioni di p e q ,ragion per cui questo connettivo è anche detto "di credulità".

Data la base di connettivi $(\wedge,\vee,\cdot,+)$, possiamo costruire induttivamente il linguaggio delle logiche basate su reticoli, così come si fa abitualmente in logica classica. Il nostro linguaggio sarà dato dall'insieme W tale che :

(i) Se p è una costante proposizionale, allora $p \in W$.

(ii) Se $p \in W$, allora $\neg p \in W$.

(iii) Se $p, q \in W$, allora $(p\wedge q)$, $(p\vee q)$, $(p\cdot q)$, $(p+q) \in W$.

1.5. Esempi di bireticoli

Esempio 1.5.1 : Four

Quando consideriamo il bireticolo prodotto $B(\boldsymbol{L},\boldsymbol{L'})$ possiamo pensare il reticolo $\boldsymbol{L}$ come quello che usiamo quando misuriamo il grado di verità di una affermazione, mentre possiamo pensare di utilizzare il reticolo $\boldsymbol{L'}$ per misurare il suo grado di falsità.

La coppia (x,y) riassume quindi le prove che abbiamo a favore e le prove che abbiamo contro un'affermazione. In altre parole interpretiamo il primo elemento della coppia come indice del grado di verità, il secondo del grado di falsità.

E' da notare che non si impone che queste coppie, o valori di verità, siano consistenti, dove valori di verità consistenti sono quelli in cui il grado di verità e il grado di falsità si complementano in modo ragionevole. Infatti si ammette anche il valore (1,1) che è manifestamente contraddittorio.

Una particolare classe di bireticoli si ottiene ponendo ***L***=***L'***. Se si considera ***L***=***L'***={0,1} si ottiene ***Four***, che rappresenta il più semplice bireticolo non degenere (perché un bireticolo non sia degenere deve possedere almeno quattro elementi distinti,cioè il massimo ed il minimo relativi a ciascuno dei due ordinamenti).

Introdotto da Belnap Four è stato studiato da diversi studiosi oltre a Ginsberg ed ha trovato molteplici applicazioni: esso rappresenta certamente il più significativo fra i bireticoli ed in un certo senso tutti gli altri ne derivano.

Come già detto, si considera *L*=*L'*={0,1} dove 0 ed 1 rappresentano rispettivamente la mancanza di prove e la certezza completa.
La struttura *B*(*L*,*L'*) è un bireticolo di quattro elementi nel quale lo Sconosciuto (simbolo ⊥) è rappresentato dalla coppia (0,0): non abbiamo, cioè, nessuna prova né a favore e né contro. Il Contraddittorio (simbolo ⊤) invece è rappresentato dalla coppia (1,1), che indica che siamo nella situazione inconsistente di avere prove complete sia a favore che contro. Allo stesso modo il Falso è dato dalla coppia (0,1), cioè abbiamo solo prove contro, mentre il Vero dalla coppia (1,0), ossia ci sono solo prove a favore.

Four può essere rappresentato mediante un doppio diagramma di Hasse.

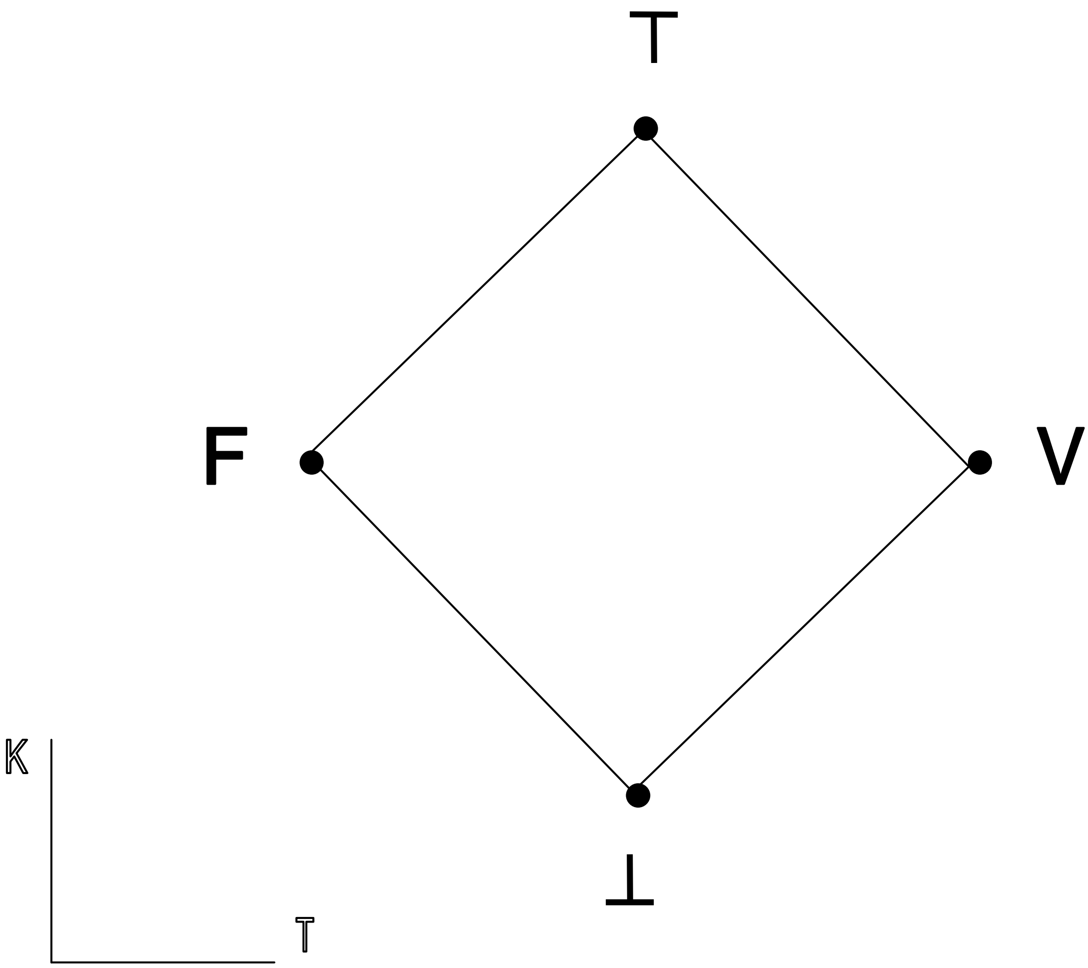

Figura 1.5.1: *Four*

Nel diagramma si ha $x \leq_t y$ se e solo se esiste un percorso che collega x e y e va uniformemente da sinistra verso destra, mentre si ha $x \leq_k y$ se e solo se esiste un percorso che collega x e y uniformemente dal basso verso l'alto.

Esempio 1.5.2. : Presup

Un altro interessante bireticolo da esaminare è quello che prende il nome di ***Presup*** e che risulta essere una estensione di Four in quanto contiene i valori (0,0), (1,1), (1,0) e (0,1). A questi valori si aggiungono però cinque nuovi valori. Se Four si ottiene come il bireticolo prodotto $B(L)$ associato all'insieme $L = \{0,1\}$,allo stesso modo si costruisce Presup, ponendo però $L = \{0, ½, 1\}$.
La struttura di Presup è chiaramente descritta dal grafico che viene riportato di seguito.

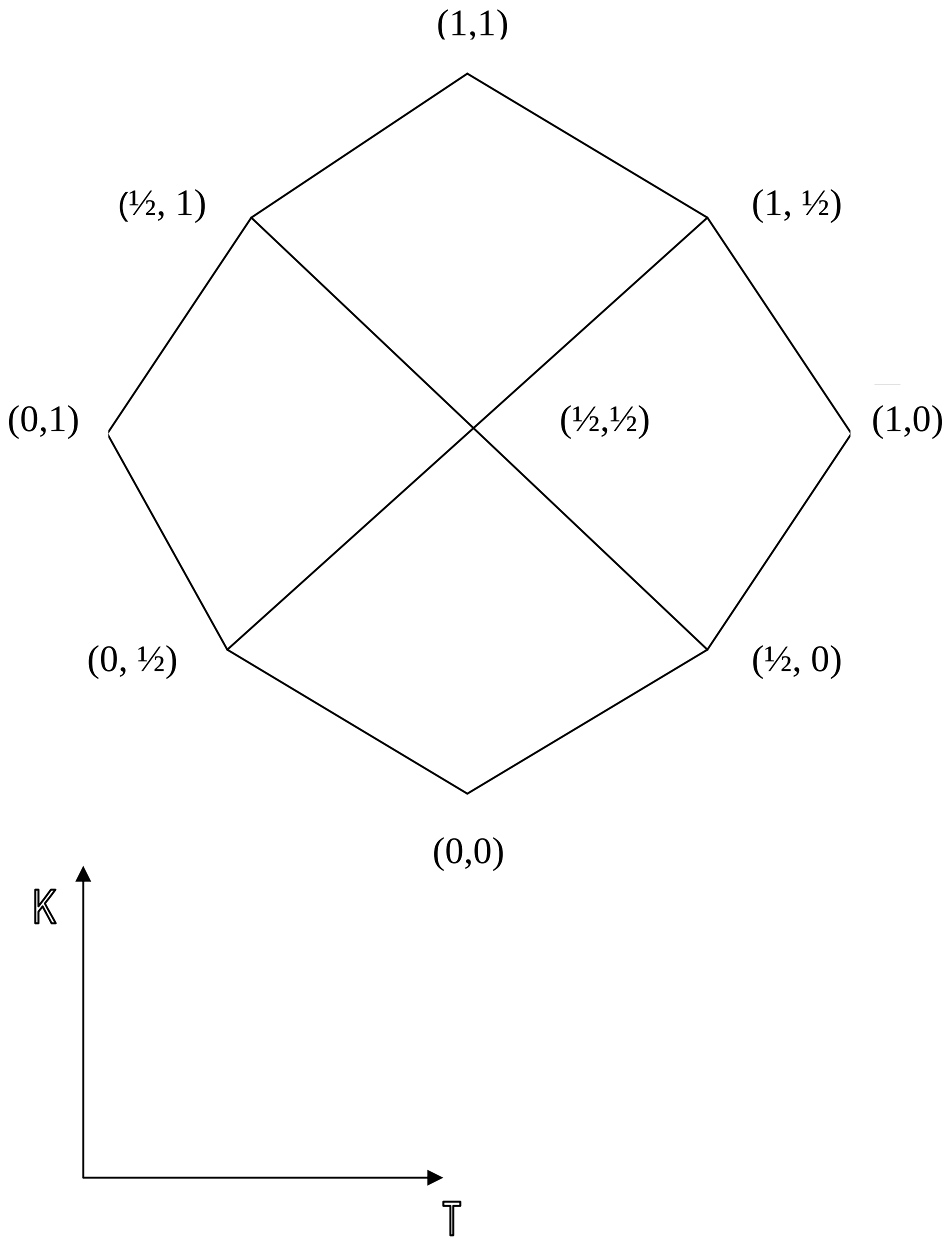

Figura 1.5.3: *Presup*

Come si può notare dal grafico, gli elementi massimi e minimi di Presup, rispetto ai due ordinamenti, sono gli stessi di quelli che abbiamo trovato quando abbiamo esaminato Four: la coppia (0,0) rappresenta la totale mancanza di informazione e corrisponde al valore che abbiamo chiamato Sconosciuto; (1,0) continua a rappresentare il Vero, cioè il caso in cui tutte la prove riguardanti un' affermazione sono a favore, mentre non c'è nessun motivo contro; allo stesso modo la coppia (0,1) come in Four rappresenta il Falso; il valore (1,1) rappresenta il caso di totale contraddizione dove tutte la prove sono a favore e contemporaneamente anche contro. Le altre coppie sono valori particolari di Presup: (½,0) rappresenta la situazione in cui ci sono alcune prove, ma non tutte, a favore e nessuna contro, cioè corrisponde alla situazione in cui si dice che l'affermazione è "presumibilmente vera"; l'elemento (0, ½) corrisponde, invece, al caso in cui si può dire che un'affermazione è "presumibilmente falsa". La coppia (½,½) indica il caso in cui c'è informazione contraddittoria su qualcosa, essa però non rappresenta una contraddizione totale e definitiva come nel caso di (1,1): la contraddizione rappresentata da (½,½) infatti può essere risolta attraverso una delle strade evidenziate dal grafico 1.5.3. I due restanti elementi (½,1) e (1,½) rappresentano il caso in cui l'informazione incompleta è stata controllata e completata: per esempio, nel caso di (1,½) la precedente ed incompleta informazione riguardante la falsità è stata contraddetta o annullata da definitive prove a favore.

Esempio 1.5.3. : Default

Un bireticolo di notevole rilevanza è ***Default,*** usato per formalizzare la *Default Logic*. Di Default fanno parte tre nuovi valori oltre a quelli già visti in Four, che chiameremo “vero per default”, “falso per default” e “contraddittorio per default”.

Questi nuovi valori vengono introdotti nel tentativo di riprodurre il ragionamento di senso comune. Nella vita quotidiana, la maggior parte dei ragionamenti si basa su conoscenze parziali, cioè ha una forma del tipo: “in assenza di informazioni in contrario, si può concludere che…”. Questo tipo di ragionamento, che consente di trarre conclusioni provvisorie, si chiama “per *default*”. Uno dei tratti caratteristici del ragionamento per default è che, qualora emergano nuove informazioni, le conclusioni tratte in precedenza possono essere riviste: il che non risulta possibile in logica classica, che è monotona nel senso che data una proposizione p e due insieme di proposizioni X e Y, se $X \models p$, allora $X \cup Y \models p$.

Un classico esempio di ragionamento non monotono è il seguente: gli uccelli, tipicamente, volano. Se ci viene detto ,perciò, che un certo individuo (che chiameremo *A*) è un uccello, in assenza di informazioni in contrario, è ragionevole dedurre che vola. Vi sono naturalmente eccezioni, come i pinguini o gli struzzi, ma anche gli uccelli morti o con le ali ferite, ecc. In logica classica per poter dedurre che *A* vola dovremmo accertarci che non è un pinguino o uno struzzo e così via. Poichè è impossibile prevedere e quindi enumerare in modo esaustivo tali eccezioni, non giungeremmo mai a concludere alcunché. Le logiche con *default* sono nate per superare questo tipo di problemi: esse consentono di trarre le conclusioni che ci aspetteremmo ma prevedono anche che, con l’acquisizione di ulteriori informazioni (nel nostro caso poniamo che *A* è un pinguino), tali conclusioni possano essere rivedute.

Come già detto, il bireticolo corrispondente al ragionamento non monotono è chiamato *Default.*

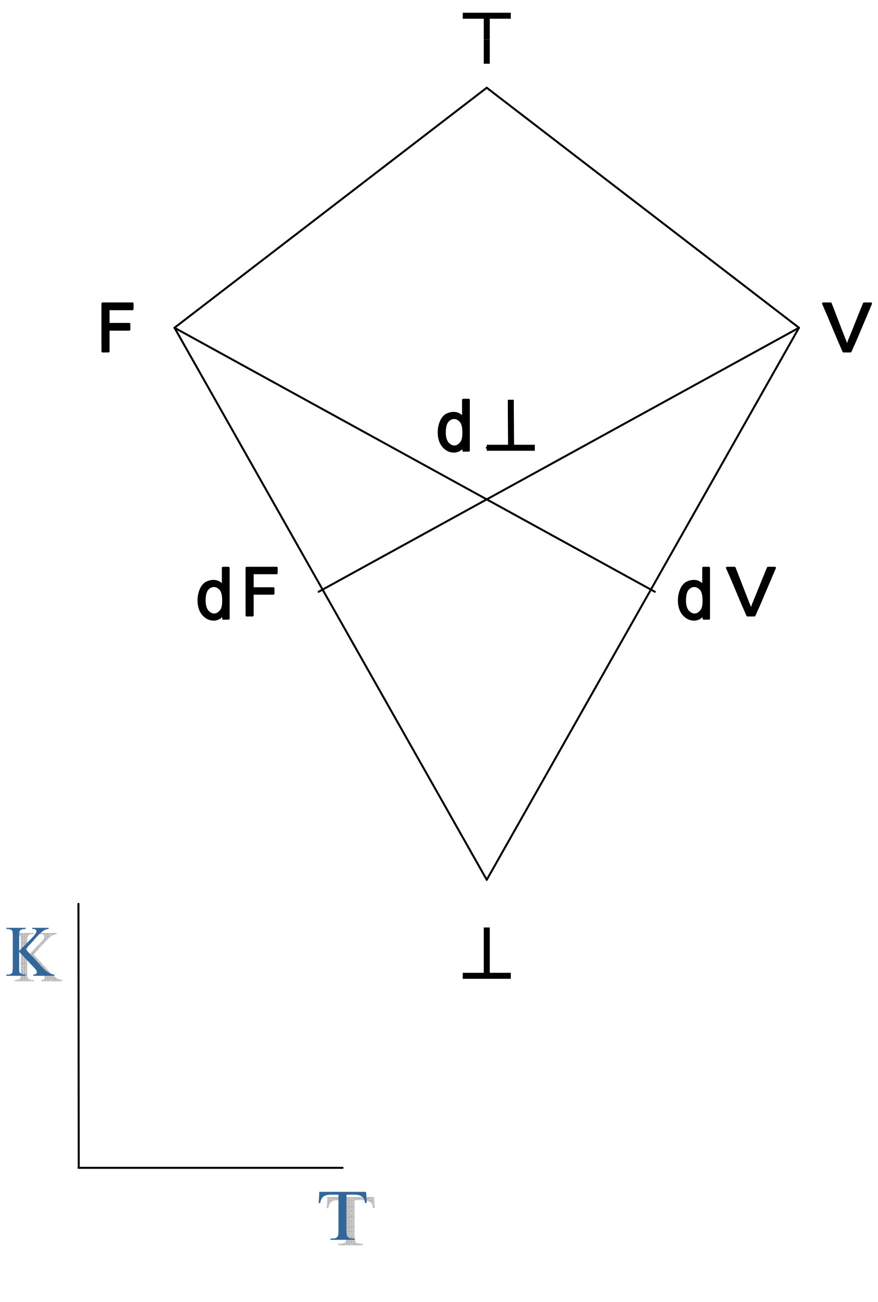

Figura 1.5.3: *Default*

Rispetto a Four, Default comprende tre nuovi valori: vero per default (**dV**). Falso per default (**dF**) e contraddittorio per default (**d⊥**). I primi due indicano, rispettivamente, una dimostrazione per default di una proposizione e una dimostrazione per default della sua negazione. Il terzo corrisponde ad entrambe le informazioni: una proposizione di cui è stata provata sia la verità che la falsità.
Nel nostro formalismo concludere che,in assenza di informazioni in contrario, *A* vola equivale dunque ad assegnare alla proposizione corrispondente il valore **dV**. Naturalmente ciò comporterà che il valore di "*A* non vola" risulti **dF**. Se poi *A* fosse un uccello domestico e vi fosse un'altra regola di default secondo la quale gli uccelli domestici non volano,allora potremmo giungere, per due diverse vie, a concludere che il valore di verità della proposizione "*A* vola" è sia **dV** che **dF**: questo equivarrebbe ad assegnare alla proposizione il valore **d⊥.**
L'ordinamento degli elementi di Default dovrebbe risultare chiaro già dal diagramma: si ha **dV** $\leq_k$ **V** perché, intuitivamente, una dimostrazione per default rappresenta una conoscenza inferiore rispetto ad una dimostrazione tradizionale, e secondo lo stesso principio risulta **dF** $\leq_t$ **F**.
Si osservi che il sub-bireticolo composto dagli elementi {**dV**,**dF**,**d⊥**, **T** } risulta isomorfo a Four, basta far corrispondere i valori in questo modo: **dV** = **V** , **dF** = **F**, **d⊥** = ⊥ , **T = T** .

Capitolo 2

BIRETICOLI INTERVALLI ED INFORMAZIONE MULTI-VALUED

2.1. Introduzione

In questo capitolo viene introdotta una particolare classe di bireticoli, i cosiddetti ***bireticoli di intervalli*** (interval bilattice) che nascono dal considerare intervalli in strutture algebriche adottate per rappresentare valori di verità e che rappresentano la struttura matematica di una importante famiglia di logiche.

Prima di mostrare la costruzione generale di questa nuova famiglia di bireticoli, viene presentato in questo primo paragrafo un caso speciale di particolare interesse.

Supponiamo, in un contesto di logica a più valori, di non essere in grado di assegnare ad una formula α il suo esatto valore di verità ma che, essendo incerti siamo in grado solo di dire che tale valore è “tra 0.6 e 0.8” . Quello che facciamo è valutare la formula con valori compresi in un intervallo $[a,b]$ dell’intervallo [0,1]. In tale caso prendiamo come valori di verità gli intervalli chiusi , per cui consideriamo l’insieme $B = \{[a,b] \mid 0 \leq a \leq b \leq 1 \}$.

Tali valori di verità vengono ordinati tramite la relazione duale alla usuale inclusione di insiemi. Infatti se $[c,d] \subseteq [a,b]$ allora l’informazione sul valore di verità fornita da $[c,d]$ è maggiore di quella fornita da $[a,b]$, perché $[c,d]$ è più piccolo. Il massimo di informazione si ottiene per intervalli degeneri del tipo $[a,a]=\{a\}$. Così poniamo

$$[a,b] \leq_k [c,d] \text{ se } [c,d] \subseteq [a,b].$$

I valori di verità che abbiamo introdotto possono, inoltre, essere parzialmente ordinati in base al "grado di verità" in modo da ottenere un reticolo. Uno dei modi per fare questo è il porre

$$[a,b] \leq_t [c,d] \text{ se } a \leq c \text{ e } b \leq d.$$

Quindi, come con i bireticoli, otteniamo una struttura con due ordinamenti parziali.

E' facile verificare che l'ordinamento $\leq_t$ definisce un reticolo completo. Infatti, in esso $[a,b] \wedge [c,d] = [\min\{a,c\}, \min\{b,d\}]$ e $[a,b] \vee [c,d] = [\max\{a,c\}, \max\{b,d\}]$. Sotto questo ordinamento, [0,0] è il minimo, e [1,1] è il massimo; li possiamo identificare, rispettivamente , con il *falso* e il *vero* . Dall'altra parte , l'ordinamento $\leq_k$ se non si aggiunge l'insieme vuoto non costituisce un reticolo completo. Più precisamente in esso è sempre definita l'operazione

$$[a,b] \cdot [c,d] = [\min\{a,c\}, \max\{b,d\}]$$

mentre l'operazione

$$[a,b] + [c,d] = [\max\{a,c\}, \min\{b,d\}]$$

potrebbe non dare un intervallo ma l'insieme vuoto. Troviamo l'elemento minimo, [0,1], che indichiamo con $\perp$, mentre non c'è il massimo elemento. Nonostante questo esempio sia stato esplicitamente considerato da Ginsberg, esso non produce un bireticolo nel senso in cui egli lo aveva definito ma serve solo come motivazione informale.

2.2. Costruzione generale

Nel paragrafo precedente abbiamo considerato il particolare intervallo [0,1], che è un ordinamento lineare. Quello che vogliamo fare ora è considerare ordinamenti più generali. Ciò ci pone davanti a due problemi: quale è l'analogo naturale dell'ordinamento lineare considerato e quale è l'analogo di un intervallo.

Consideriamo un reticolo completo L, con l'ordinamento $\leq_L$. Vogliamo individuare una classe C di sottoinsiemi di L che svolga un ruolo analogo a quello giocato dagli intervalli in [0,1] e che abbia un buon comportamento rispetto alla relazione $\leq_t$. In C daremo due ordinamenti. Uno, $\leq_k$, inverte l'inclusione. L'altro, $\leq_t$, è più complesso. Se I_1 e I_2 sono due elementi di C, sembra naturale dire che I_2 rappresenta una maggiore verità, o una minore falsità rispetto a I_1 se : $\forall\, x \in \mathrm{I}_1\ \exists\, y \in I_2$ con $x \leq y$, e $\forall\, y \in \mathrm{I}_2\ \exists\, x \in I_1$ con $x \leq y$; sotto queste condizioni poniamo $I_1 \leq_t I_2$. Ciò coincide con l'ordinamento $\leq_t$ usato nel precedente paragrafo.

La relazione definita in questo modo è un preordine a cui è associata la seguente relazione di equivalenza: $I_1 \equiv_t I_2$ se $I_1 \leq_t I_2$ e $I_2 \leq_t I_1$. Gli intervalli che sono equivalenti in questo senso devono essere identici, e questo conduce ad una parte della definizione di intervallo.

Chiamiamo *chiuso* un sottoinsieme S di L se esso contiene, per ogni due punti comparabili , tutti i punti tra essi. In altri termini S è chiuso se $\forall\, x, y \in S$ con $x \leq_L y$, se $x \leq_L z \leq_L y$ allora $z \in S$. Definiamo, poi, *chiusura* di un insieme S il più piccolo chiuso che lo contiene, e lo denotiamo con $cl(S)$. Per ogni sottoinsieme S di L si ha che $S \equiv_t cl(S)$. Ciò suggerisce di richiedere che gli intervalli siano sottoinsiemi chiusi di L. Comunque la condizione di chiusura non è sufficiente. Infatti introduciamo ora le operazioni logiche sugli intervalli.

Se I_1 e I_2 sono intervalli, si pone

$$I_1 \wedge I_2 = \{x \wedge y \mid x \in I_1 \text{ e } y \in I_2\},$$

dove $x \wedge y$ è calcolato nel reticolo L. Supposto I_2 non vuoto, si dimostra che :

1) $I_1 \wedge I_2 \leq_t I_1$

   $I_1 \wedge I_2 \leq_t I_2$

2) se $I \leq_t I_1$ e $I \leq_t I_2$ allora $I \leq_t I_1 \wedge I_2$.

In particolare $I_1 \wedge I_1 \leq_t I_1$ e quindi gli intervalli devono essere chiusi rispetto all'operazione $\wedge$ di L. Considerazioni simili ci portano ad imporre la chiusura rispetto all'operazione $\vee$, così gli intervalli stessi sono sottoreticoli di L.

In conclusione un intervallo in *L* è un sottoinsieme chiuso e non vuoto di *L* che è un reticolo completo.
Se *I* soddisfa queste condizioni, poiché è un reticolo completo, deve contenere il suo *inf*, che chiamiamo *a*, e il suo *sup*, che indichiamo con *b*. Poiché esso è chiuso , deve contenere tutti gli elementi di *L* compresi tra *a* e *b*. Dall'altra parte, per ogni a, $b \in L$ con $a \leq_L b$, l'insieme $\{x \in L \mid a \leq_L x \leq_L b\}$ è un intervallo. Arriviamo, quindi, alla seguente definizione .

Definizione 2.2.1. Siano a, b $\in$ L con $a \leq_L b$. L' *intervallo* determinato da a e b, denotato con [a,b], è $\{x \in L \mid a \leq_L x \leq_L b\}$.

Definizione 2.2.2. Sia L un reticolo completo. Chiamiamo ***bireticolo di intervalli***, che indichiamo con K(L), la struttura $(I(L), \leq_k, \leq_t)$ dove I(L) è l'insieme di tutti gli intervalli in L; e per $[a,b],[c,d] \in I(L)$, $[a,b] \leq_k [c,d]$ se $[c,d] \subseteq [a,b]$; e $[a,b] \leq_t [c,d]$ se per ogni $x \in [a,b]$ $\exists$ $y \in [c,d]$ con $x \leq_L y$ e per ogni $y \in [c,d]$ $\exists$ $x \in [a,b]$ con $x \leq_L y$.

Le operazioni relative a $\leq_t$ sono $\wedge$ e $\vee$, e il *falso* e il *vero* sono rispettivamente il minimo e il massimo rispetto a questo ordinamento.

Le operazioni relative a $\leq_k$ sono $\cdot$ e $+$, e $\perp$ è il minimo rispetto a questo ordinamento.
In generale usiamo 0 e 1 per indicare il minimo e il massimo di *L*, per cui poniamo *falso* = [0,0], *vero* = [1,1] e $\perp$ = [0,1].

Le definizioni che abbiamo dato dei due ordinamenti $\leq_k$ e soprattutto $\leq_t$ sono molto complicate; questo dipende dal fatto che abbiamo cercato di dare una definizione più generale possibile.
Ora che abbiamo dato una definizione semplice di intervallo, è facile semplificare la caratterizzazione degli ordinamenti sopra citati. A tal proposito riportiamo le seguenti proposizioni.

Proposizione 2.2.1. Siano [a,b] e [c,d] intervalli in K(L). Allora:

1) $[a,b] \leq_t [c,d] \Leftrightarrow a \leq_L c$ e $b \leq_L d$,
2) $[a,b] \leq_k [c,d] \Leftrightarrow a \leq_L c$ e $d \leq_L b$.

Proposizione 2.2.2. Siano [a,b] e [c,d] intervalli in K(L). Allora:

1) $[a,b] \wedge [c,d] = [a \wedge c\ ,\ b \wedge d\ ]$,
2) $[a,b] \vee [c,d] = [a \vee c\ ,\ b \vee d\ ]$,
3) $[a,b] \cdot [c,d] = [a \wedge c\ ,\ b \vee d\ ]$,
4) $[a,b] + [c,d] = [a \vee c\ ,\ b \wedge d\ ]$.

Proposizione 2.2.3. (Interlacing conditions) . Per [a,b], [c,d] e [e,f] intervalli in K(L):

1) se $[a,b] \leq_k [c,d] \Rightarrow [a,b] \wedge [e,f] \leq_k [c,d] \wedge [e,f]$,
2) se $[a,b] \leq_k [c,d] \Rightarrow [a,b] \vee [e,f] \leq_k [c,d] \vee [e,f]$,
3) se $[a,b] \leq_t [c,d] \Rightarrow [a,b] \cdot [e,f] \leq_t [c,d] \cdot [e,f]$,
4) se $[a,b] \leq_t [c,d] \Rightarrow [a,b] + [e,f] \leq_t [c,d] + [e,f]$.

Più forti sono le condizioni di distributività. Poiché ci sono quattro operazioni, ci saranno dodici leggi di distributività.

Proposizione 2.2.4. (Distributività). Dato un reticolo distributivo L. Allora tutte le leggi distributive valgono in K(L), purchè le operazioni coinvolte sono definite.

2.3 Esempio

Di seguito presentiamo un esempio di bireticolo di intervalli che deriva da un reticolo non lineare caratterizzato dalla proprietà di invertire l'ordine.
Tale esempio è descritto dalla figura 2.3.1 .

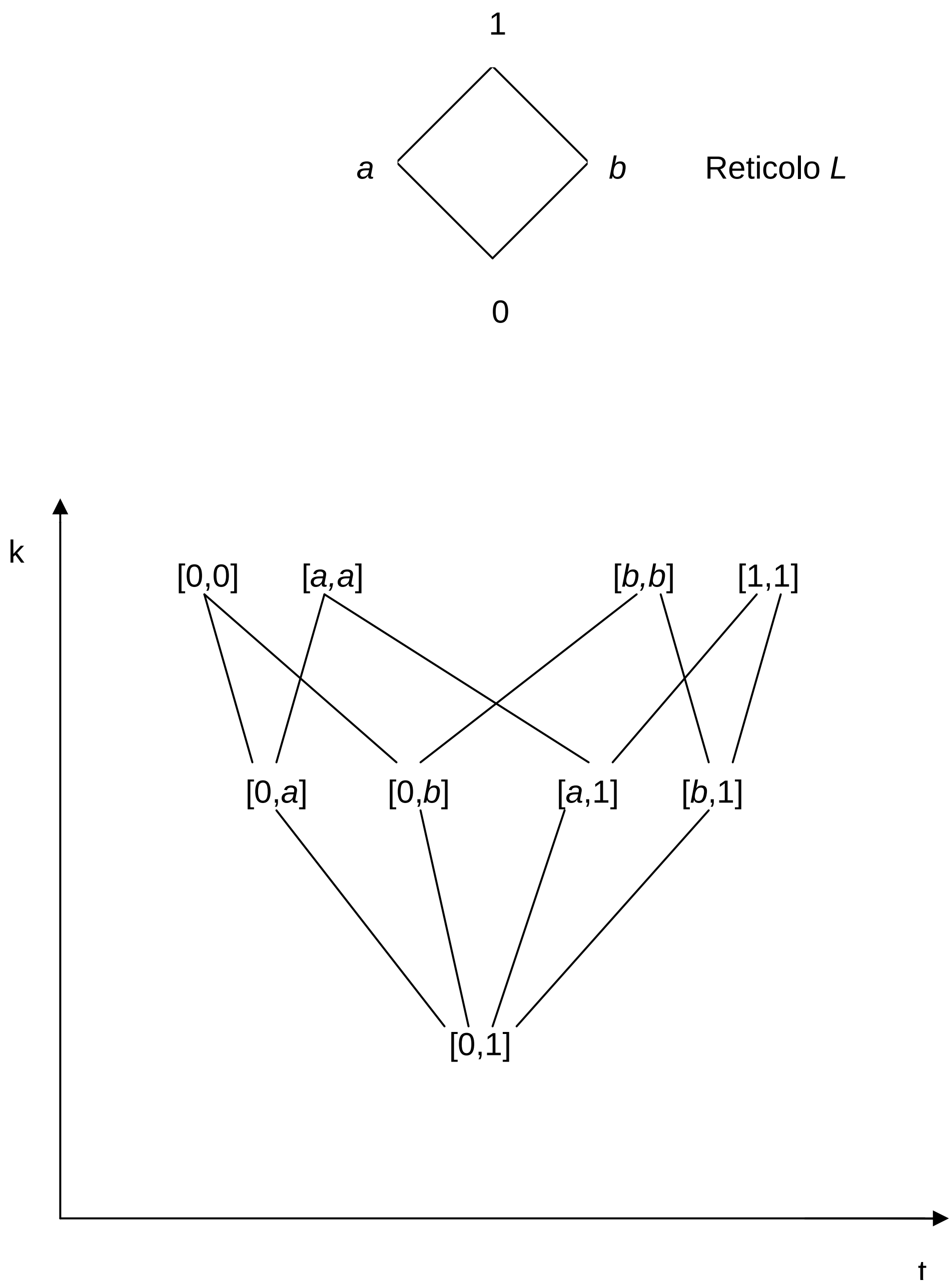

Figura 2.3.1: *Reticolo L e K(L).*

Il reticolo *L* ha quattro punti, mentre *K*(*L*) ne ha nove. *L* è caratterizzato da una involuzione che inverte l'ordine, scambia 1 con 0 mentre lascia invariati *a* e *b*. La chiameremo "simmetria verticale".

Per comprendere intuitivamente le strutture presenti nella figura 2.3.1, supponiamo di avere due esperti, *A* e *B*, e di fare loro una domanda alla quale è possibile rispondere solo "si" oppure "no". Interpretiamo i quattro punti di *L* nel modo seguente: il punto 0 rappresenta una risposta "no" da entrambi; *a* rappresenta un "si" da *A* e un "no da *B*; *b* rappresenta un "si" da *B* e un "no" da *A*; infine 1 rappresenta un "si" da entrambi.

Allora in *K*(*L*), l'intervallo [0,*a*], per esempio, rappresenta lo stato di parziale conoscenza nella quale la risposta di *A* non è conosciuta mentre *B* ha risposto "no". Un aumento della conoscenza si ha se si considera l'intervallo [0,0], che indica che *A* ha risposto "no", oppure l'intervallo [*a*,*a*], che indica che *A* ha risposto "si". Allo stesso modo l'intervallo [*a*,1] rappresenta lo stato di parziale conoscenza nella quale *A* ha risposto "si" mentre la risposta di *B* non è nota.

2.4. Un teorema di isomorfismo

Supponiamo di avere il bireticolo (B, $\leq_t$, $\leq_k$) e ricordiamo che una *negazione* è una involuzione $\neg$ da *B* in se stesso che inverte $\leq_t$, mentre lascia invariato $\leq_k$. Una nozione simile è quella di convoluzione.

Definizione 2.4.1. Chiamiamo *convoluzione* in un bireticolo B una involuzione – in B che inverte $\leq_k$ e lascia invariato $\leq_t$. Chiamiamo *consistente* un elemento b di un bireticolo con convoluzione se b $\leq_k$ –b.

Quello che ci interessa è vedere sotto quali condizioni una logica creata usando gli intervalli presentati prima, si identifica con gli elementi consistenti di un bireticolo.

Sappiamo che se $L_1 = L_2$ può essere introdotta una naturale negazione nel bireticolo prodotto $B(L_1,L_2)$: basta porre $\neg\,(a,b) = (b,a)$.

Inoltre se $L_1 = L_2 = L$ e c'è una involuzione $-$: $L \rightarrow L$ che inverte l'ordine su L, può essere introdotta una operazione di convoluzione $-$: $B(L,L) \rightarrow B(L,L)$ che commuta con la negazione ponendo:

$-(a,b) = (-b,-a)$,

Teorema 2.4.1. Supponiamo che L sia un reticolo completo con una involuzione che inverte l'ordine. Allora K(L) è un isomorfo all'insieme degli elementi consistenti di un bireticolo allacciato con negazione e convoluzione .

Dimostrazione.

Definiamo una applicazione θ: $K(L) \rightarrow B(L,L)$ nel modo seguente. $\theta([a,b]) = (a,-b)$, dove $-b$ è l'involuzione di b in L. Ora, $(a,-b)$ è consistente in $B(L,L)$ se e solo $(a,-b) \leq_k -(a,-b) = (b,-a)$ se e solo se $a \leq_L b$ e $-b \leq_L -a$ se e solo se $a \leq_L b$. Segue che $[a,b]$ è un intervallo in $K(L)$ se e solo se $\theta([a,b])$ è un elemento consistente di $B(L,L)$. E' facile verificare che θ è un isomorfismo.

Per fare un esempio che illustri il significato dell'isomorfismo θ, si può supporre di associare ad ogni formula $\alpha \in F$ un intervallo $[X,Y]$ dove X è l'insieme dei mondi in cui io ritengo che la formula sia vera e quindi necessaria, mentre Y è l'insieme dei mondi in cui io ritengo che sia possibile α. E' evidente che $X \subseteq Y$.

L’isomorfismo θ è definito nel seguente modo: $\theta([X,Y]\ ) = (X, -Y)$ dove $-Y$ è l’insieme dei mondi in cui non è possibile α, cioè l’insieme dei mondi in cui è necessaria $-\alpha$. In altre parole $-Y$ è l’insieme dei mondi in cui la formula α è considerata falsa.

Dimostriamo ora il seguente fondamentale teorema.

Teorema 2.4.2. Supponiamo che B sia un bireticolo distributivo con una negazione e una convoluzione che commuta. Allora la sottostruttura degli elementi consistenti di B è isomorfa a K(L), dove L è un reticolo completo e distributivo.

Dimostrazione.
In accordo con le osservazioni fatte sopra, B è isomorfo a $B(L,L)$, dove L è un reticolo completo con una involuzione che inverte l’ordine. Allora , come nella dimostrazione del teorema precedente, definiamo $\theta : K(L) \rightarrow B(L,L)$ in questo modo: $\theta(\ [a,b]) = (a,-b)$. E’ facile verificare che è l’isomorfismo desiderato.

Capitolo 3
BIRETICOLI ED INFORMAZIONE BOOLEANA

3.1 Logiche a più valori

La teoria dei bireticoli nasce in analogia con le logiche a più valori ed è quindi utile esporre alcuni aspetti di tale logica. Consideriamo un linguaggio per il calcolo proposizionale in cui si considerano come primitivi i connettivi logici $\wedge$, $\vee$, $\neg$. Indichiamo con *F* l'insieme delle formule di tale linguaggio e sia (V, $\otimes$, $\oplus$, ~, 0, 1) una struttura algebrica i cui elementi chiamiamo *valori di verità*. Si assume che in *V* ci sia un ordinamento $\leq$ in modo che (V, $\leq$, 0, 1) sia un reticolo completo con elemento minimo 0 ed elemento massimo 1. La struttura (V, $\otimes$, $\oplus$, ~, 0, 1) viene chiamata *struttura di valutazione*.

Definizione 3.1.1. Data una struttura di valutazione (V, $\otimes$, $\oplus$, ~ ,0, 1), chiamiamo *valutazione vero-funzionale* ogni funzione
$m : F \rightarrow V$ tale che:

$$m(\alpha\wedge\beta) = m(\alpha)\otimes m(\beta)$$
$$m(\alpha\vee\beta) = m(\alpha)\oplus m(\beta)$$
$$m(\neg\alpha) = {\sim}m(\alpha)$$

Una valutazione vero-funzionale *m* viene anche chiamata *modello*, indichiamo con *M* l'insieme di tali modelli. Come nel calcolo proposizionale classico per ottenere una valutazione vero-funzionale è sufficiente assegnare alle variabili proposizionali valori in V e poi estendere opportunamente la valutazione a tutte le formule.

Con tale definizione abbiamo definito la semantica. Infatti una valutazione vero-funzionale deve essere vista come la descrizione completa di un mondo. Per potere definire l'apparato deduttivo dobbiamo in qualche modo specificare che cosa si debba intendere per informazione parziale. Infatti un apparato deduttivo è uno strumento per elaborare (esplicitare) informazione parziale. Una prima ipotesi sarebbe quella di considerare una valutazione iniziale v: $F \rightarrow V$ come una assegnazione di valori di verità. Tuttavia tale punto di vista non è adeguato in quanto è possibile che si abbia a disposizione solo informazione incompleta sui possibili valori di verità e non direttamente i valori di verità. Pertanto, per ogni formula α, $v(\alpha)$ non è necessariamente un valore di verità di α ma un *vincolo* (*constraint*) sul valore di verità effettivo di α. Questo vincolo si può esprimere con frasi del tipo

"il valore di verità di α è maggiore o uguale di 0.7".

Naturalmente niente esclude che si possano considerare constraint del tipo intervallo come:

"il valore di verità di α è compreso tra 0.3 e 0.5".

Più in generale il tipo di informazione che potremmo dovere elaborare è del tipo

"il valore di verità di α appartiene a X"

dove X è un sottoinsieme di V. In altre parole la classe dei possibili constraint è $P(V)$. Tuttavia, nel caso in cui V è infinito, l'intera classe $P(V)$ dei vincoli risulta troppo grande e nessun linguaggio sarebbe in grado di rappresentare i suoi elementi. E' molto più conveniente, quindi, riferirci solo ad una particolare classe di constraint e, per motivi tecnici, è utile supporre che i constraint costituiscano un sistema di chiusura.

Definizione 3.1.2. Un sistema di constraint in V è un sistema di chiusura C in P(V). Dato un sottoinsieme X di V, definiamo il *constraint generato* da X nel modo seguente

$$<X> = \bigcap\{Y \in C : Y \supseteq X\}.$$

Usualmente ci si riferisce ai due seguenti tipi di sistemi di constraint.

Definizione 3.1.3. Chiamiamo *sistema di constraint inferiori* la classe

$$C_l = \{[\lambda,1] : \lambda \in V\}$$

Chiamiamo *sistema di constraint intervallo* la classe

$$C_i = \{[a,b] : a,b \in V\}.$$

La classe C_l è un sistema di chiusura. Infatti, data una famiglia $([\lambda_i ,1])_{i\in I}$ di elementi in C_l, l'intersezione $\bigcap_{i\in I} [\lambda_i ,1] = [Sup_{i\in I}\ \lambda_i ,1]$ è ancora un elemento di C_l. Per provare che la classe C_i degli intervalli è un sistema di chiusura basta osservare che se $([a_i , b_i])_{i\in I}$ è una famiglia di intervalli tali che $a_i \leq b_i$, allora $\bigcap_{i\in I} [a_i , b_i]$ è l'intervallo $[Sup_{i\in I}\ a_i, Inf_{i\in I}\ b_i]$.

Per quanto riguarda la cardinalità, è evidente che se *V* è infinito allora C_i e C_l hanno la stessa cardinalità di *V*. Ad esempio se *V* è l'intervallo [0,1], allora tali sistemi di constraint hanno la potenza del continuo. Per questo motivo in logica fuzzy ci si riferisce principalmente agli intervalli ad estremi razionali nella rappresentazione della conoscenza iniziale. Non ci occuperemo di questo aspetto della logica a più valori.

Definizione 3.1.4. Sia C un sistema di constraint, una *valutazione iniziale* è una funzione v: F→C. Se m∈M, diciamo che m è un *modello* di v se m(α)∈v(α) per ogni formula α. In tale caso scriviamo m ⊨ v.

In altre parole l'informazione fornita da v sul modello m ci dice che, per ogni formula α, il grado di verità di α appartiene all'insieme $v(\alpha)$.

Proposizione 3.1.1. Nel caso in cui C_i sia l'insieme degli intervalli una valutazione iniziale è definita da una coppia (v_1,v_2) di fuzzy sottoinsiemi di formule, tale che $v(\alpha) = [v_1(\alpha), v_2(\alpha)]$. I modelli di una tale valutazione iniziale sono gli elementi $m \in M$ tali che $v_1(\alpha) \leq m(\alpha) \leq v_2(\alpha)$ per ogni formula α.

In altra parole il significato delle due funzioni v_1 e v_2 è che per ogni formula α, α è vera almeno con grado $v_1(\alpha)$ e al più con grado $v_2(\alpha)$.

La logica classica può essere descritta in termini di operatori di chiusura. Infatti, si definiscono due operatori che corrispondono alla relazione semantica di "conseguenza logica" ed alla relazione sintattica di "deduzione". L'operatore di *conseguenza logica* $Lc : P(L) \to P(L)$, viene definito ponendo, per ogni insieme X di formule,

$$Lc(X) = \{\alpha \in L \mid X \models \alpha\}.$$

Analogamente, l'operatore di *deduzione* $D : P(L) \to P(L)$ si definisce ponendo

$$D(X) = \{\alpha \in L \mid X \vdash \alpha\} .$$

Entrambi sono operatori di chiusura ed il teorema di completezza afferma che tali operatori coincidono[1]. Possiamo interpretare l'insieme X di formule come l'informazione immediatamente disponibile mentre $Lc(X)$ come l'informazione, implicita in X, che possiamo ricavare ed esplicitare in qualche modo. Un punto fisso di tali operatori viene chiamato sistema *chiuso* di formule ed è un sistema di formule chiuso per deduzione. L'insieme dei teoremi di una data teoria è un esempio di insieme chiuso di formule.

[1] Supponiamo note le definizioni di linguaggio, di formula ben formata e, più in generale, tutte le nozioni base della logica matematica classica.

L'insieme delle formule vere in un dato modello è un altro esempio di insieme chiuso.
Infine, poiché l'operatore di deduzione è definito in modo costruttivo tramite la nozione di dimostrazione, il teorema di completezza in sostanza afferma che esiste un modo effettivo per calcolare l'informazione $Lc(X)$.
Proponiamo un simile approccio alle logiche a più valori.

Definizione 3.1.5. Data una struttura di valutazione V ed un sistema di constraint C, sia Val(C) l'insieme delle valutazioni iniziali $v : F \rightarrow C$. Allora chiamiamo *operatore di conseguenza logica*, la funzione $Lc : Val(C) \rightarrow Val(C)$ definita ponendo

$$Lc(v)(\alpha) = <\{m(\alpha) : m \in M, m \models v\}>$$

per ogni valutazione iniziale v.

Ritornando ad esempio al caso dei constraint intervallo, cioè quello in cui $v(\alpha) = [v_1(\alpha),v_2(\alpha)]$, possiamo facilmente vedere come sia fatto l'operatore di conseguenza logica.

Proposizione 3.1.2. Se il sistema di constraint è di tipo intervallo allora

$$Lc(v)(\alpha) = [J(v_1 ,v_2)(\alpha), J'(v_1 ,v_2)(\alpha)]$$

dove

$$J(v_1 ,v_2) = \bigcap\{m\in M : v_1 \subseteq m \subseteq v_2\} \;;$$

$$J'(v_1 ,v_2) = \bigcup\{m\in M : v_1 \subseteq m \subseteq v_2\}.$$

Come per la logica classica, anche per le logiche a più valori si pone il problema di definire opportunamente un operatore di deduzione logica D e quindi di provare che D coincide con Lc. Non affrontiamo questo problema poiché siamo interessati principalmente all'uso della teoria dei bireticoli in logica.

3.2 Valutare con i bireticoli

Nel capitolo 2 abbiamo visto che se si considera l'insieme degli intervalli chiusi contenuti in [0,1], cioè

$$B = \{[a,b] \mid 0 \leq a \leq b \leq 1\}$$

si possono introdurre in B due ordinamenti parziali definiti nel modo seguente

$$[a,b] \leq_k [c,d] \text{ se } [c,d] \subseteq [a,b].$$

$$[a,b] \leq_t [c,d] \text{ se } a \leq c \text{ e } b \leq d.$$

Pertanto l'insieme dei constraint intervallo che abbiamo considerato nel paragrafo precedente ha una struttura di bireticolo. Lo stesso può essere detto sull'insieme delle valutazioni iniziali. Ciò suggerisce la necessità di tornare alla teoria dei bireticoli.

Definizione 3.2.1. Dato l'insieme F delle formule ben formate, e dato un bireticolo B, chiamiamo *valutazione* (o *funzione di verità*) una funzione ϕ che ad ogni formula α di L associa un elemento di B.

$$\phi : L \to B$$

Come nella logica a più valori, data una valutazione ϕ e una formula α, possiamo dire che ϕ contiene sia informazioni esplicite su α (espresse direttamente dal valore $\phi(\alpha)$), che informazioni implicite che si possono dedurre dalle informazioni fornite da ϕ sulle formule logicamente collegate ad α. Tutte queste informazioni possono essere catturate attraverso una nuova valutazione $cl(\phi)$, detta *chiusura di* ϕ. Tenendo conto del fatto che è opportuno che *cl* sia un operatore di chiusura, in Ginsberg [1988] vengono elencate le seguenti proprietà che *cl* dovrebbe verificare:

1. Deve essere definibile solo a partire dai due ordini parziali, $\leq_t$ *e* $\leq_k$, e dalla negazione che caratterizzano la struttura di bireticolo.
2. $cl(cl(\phi)) = cl(\phi) \ \ \forall\phi$

3. $cl(\phi)(\alpha) \geq_k \phi(\alpha) \ \ \forall \alpha$
4. Deve essere compatibile con la nozione di deduzione della logica classica del primo ordine.

Le proprietà 2 e 3 esprimono un carattere comune a tutti gli operatori di conseguenza logica. Precisamente, la seconda ci dice che con *cl* si vuole rappresentare un operatore che rappresenti tutte le informazioni implicite in ϕ. La terza proprietà, ci dice che $cl(\phi)(\alpha)$ deve contenere più informazione di quante ne contenga $\phi(\alpha)$ (carattere conservativo). La quarta proprietà evidenzia che la teoria dei bireticoli è stata introdotta come strumento per la logica classica e non come alternativa alla logica classica. Ciò comporta ad esempio che se due formule sono logicamente equivalenti nella logica classica allora devono essere valutate allo stesso modo in $cl(\phi)$. Da notare che con tale elenco Ginsberg stranamente non richiede la monotonia che invece usualmente si assume in un operatore di chiusura e che caratterizza le logiche monotone.
Diamo ora la seguente definizione.

Definizione 3.2.2. Date due valutazioni ϕ e ψ, ϕ sarà detta *estensione* di ψ, e scriveremo $\phi \geq_k \psi$, se e solo se $\phi(\alpha) \geq_k \psi(\alpha) \ \ \forall \alpha \in L$. Diremo che l'estensione è *propria* se ϕ è diverso da ψ.

Intuitivamente, una estensione di una valutazione è una valutazione ottenuta dalla precedente acquisendo nuove informazioni che, nel caso di estensione propria, non sono esplicitate nei valori di verità originali.

Nello studio della chiusura delle funzioni di verità a più valori, risulta molto utile esaminare prima la chiusura delle valutazioni che assumono valori in particolari bireticoli detti *bireticoli dei mondi*. Questa interessante classe di bireticoli viene descritta nei dettagli nei prossimi paragrafi.

3.3 La semantica dei mondi possibili

Un interessante esempio, che può rendere più chiaro quanto detto nei paragrafi precedenti, si ottiene quando la struttura di valutazione è un' algebra di Boole. Come al solito indicheremo con F la classe delle formule del calcolo proposizionale.

Definizione 3.3.1. Consideriamo un algebra di Boole completa

$$U = (B, \vee, \wedge, -, 0, 1).$$

Allora indichiamo con M la classe dei *modelli Booleani*, cioè delle valutazioni vero-funzionali in U.

La precedente definizione ci dice che un modello Booleano è una funzione $m : F \rightarrow U$ tale che

$$m(\alpha \wedge \beta) = m(\alpha) \wedge m(\beta)\ , \quad m(\alpha \vee \beta) = m(\alpha) \vee m(\beta)\ , \quad m(\neg \alpha) = -m(\alpha).$$

Non è difficile provare che se $m \in M$ allora $m(\alpha) = 0$ per ogni contraddizione α e $m(\alpha) = 1$ per ogni tautologia α. In più se α è logicamente equivalente a β, allora $m(\alpha) = m(\alpha)$.

Esempi molto interessanti di valutazione booleana sono legati alla semantica dei mondi possibili. Tale semantica è stata introdotta da Kripke per lo studio delle logiche modali e si è rivelata utile in molte situazioni. Si parte da un insieme W, detto "universo" ed i cui elementi vengono detti "mondi" e una valutazione vero-funzionale si ottiene associando ad una asserzione α l'insieme $m(\alpha)$ dei mondi in cui α è vera. In altre parole i "valori di verità" coincidono con i sottoinsiemi di W e la struttura cui ci si riferisce è l'algebra di Boole $(P(W), \cap, \cup, \emptyset, W)$. La valutazione vero-funzionale delle formule in tale struttura sarà in accordo con le equazioni

$m(\alpha \wedge \beta) = m(\alpha) \cap m(\beta)$

$m(\alpha \vee \beta) = m(\alpha) \cup m(\beta)$

$m(\neg\alpha) = -m(\alpha)$

Se si considerano constraint inferiori, il significato di una valutazione iniziale $v\colon F \rightarrow C_l$ è che, data una formula α, sappiamo che essa è vera almeno in tutti i mondi che sono in $v(\alpha)$. Diremo che m è un modello di v se e solo se $m(\alpha) \supseteq v(\alpha)$ per ogni formula α.

Inoltre

$$Lc(v)(\alpha) = \bigcap\{m(\alpha)\colon\ m \geq v\}$$

dove

$$m \geq v \quad \Leftrightarrow \quad m(\beta) \supseteq v(\beta) \qquad \forall\beta\in F$$

Consideriamo invece come sistema di constraint la classe C_i degli intervalli in U. Allora una valutazione iniziale v è definita dalla coppia (v_1 ,v_2) di funzioni Booleane tali che $v_1 \leq v_2$, e il suo significato è che, data una formula α, sappiamo che essa è vera almeno in tutti i mondi in $v_1(\alpha)$ e al più vera in tutti i mondi che ci sono in $v_2(\alpha)$. In altre parole α è vera in tutti i mondi in $v_1(\alpha)$ e falsa in tutti i mondi nel complementare di $v_2(\alpha)$.

Inoltre

$$Lc(v)(\alpha) = [J(v_1 ,v_2)(\alpha), J'(v_1 ,v_2)(\alpha)]$$

dove

$$J(v_1 ,v_2) = \bigcap\{m(\alpha) : v_2 \geq m \geq v_1\}$$

e

$$J'(v_1 ,v_2) = \bigcup\{m(\alpha) : v_2 \geq m \geq v_1\}$$

3.4 Il bireticolo dei mondi

E’ possibile confrontarsi con la semantica dei mondi possibili ora proposta con la nozione di bireticolo. Un primo tentativo è il seguente. Data una affermazione α, ad essa associamo sia l’insieme dei mondi in cui è vera, attraverso una applicazione m_1, che l’insieme dei mondi in cui α è falsa, attraverso una applicazione m_2. In altri termini si pone, per ogni $\alpha \in F$:

$$m_1(\alpha) = \{w \in W \text{ t.c. } \alpha \text{ è vera in } w\}$$

$$m_2(\alpha) = \{w \in W \text{ t.c. } \alpha \text{ è falsa in } w\}$$

In altre parole un modello è dato da una coppia di funzioni a valori in $P(W)$ oppure, equivalentemente, da una funzione $m : F \rightarrow P(W)\times P(W)$. Ciò suggerisce di considerare il bireticolo prodotto $B_W = B(P(W))$. Tuttavia i valori che assume m sono necessariamente coppie $(X;Y)$ in cui risulta che $X\cup Y = W$ e $X\cap Y = \emptyset$. Infatti è evidente che l’insieme Y dei mondi in cui una formula α è falsa è il complemento dell’insieme X dei mondi in cui essa è vera. Supponiamo invece di volere rappresentare le informazioni (eventualmente incomplete o contraddittorie) che si possono avere sull’universo. In tale caso spostiamo l’attenzione da “essere vero” a “sapere che è vero” e quando scriviamo $v(\alpha) = (X,Y)$ intendiamo dire che

- riteniamo che in tutti i mondi in X α è vera
- riteniamo che in tutti i mondi in Y α è falsa.

Tuttavia potrebbe accadere che in un mondo w non si sappia se α è vera o meno e quindi che $w\notin X\cup Y$. Inoltre, potrebbe esistere un mondo w in cui le informazioni ricevute circa la validità di α sono contraddittorie, nel senso che portano sia ad affermare che a negare α. In tale caso $w\in X\cap Y$. In definitiva ogni possibile coppia di sottoinsiemi di W può essere una valutazione di una formula e ciò suggerisce di considerare il bireticolo prodotto di $P(W)$ per se stesso. Ricordiamo che tale bireticolo sarà uguale alla struttura B_W =

$(P(W)\times P(W), \leq_t, \leq_k)$ dove i due ordinamenti $\leq_t$ *e* $\leq_k$ sono definiti nel seguente modo per ogni (X , Y) , $(X' , Y') \in P(W)\times P(W)$

$(X , Y) \leq_t (X' , Y') \Leftrightarrow X \subseteq X'$ e $Y' \subseteq Y$

$(X , Y) \leq_k (X' , Y') \Leftrightarrow X \subseteq X'$ e $Y \subseteq Y'$.

Diremo, quindi, che una proposizione α con valore di verità (X,Y) è meno vera di una proposizione β con valore di verità (X',Y'), quando essa è vera in meno mondi di β, e falsa in più mondi di β.

Diremo, poi, che abbiamo più informazioni su β rispetto a α, se sappiamo che β è vera ogni volta che lo è α e falsa tutte le volte in cui α è falsa.

Le quattro operazioni di bireticolo associate ai due ordinamenti $\leq_t$, $\leq_k$ sono

$(X,Y) \wedge (X',Y') = (X \cap X',Y \cup Y')$

$(X,Y) \vee (X',Y') = (X \cup X',Y \cap Y')$

$(X,Y) \cdot (X',Y') = (X \cap X',Y \cap Y')$

$(X,Y) + (X',Y') = (X \cup X',Y \cup Y')$

Il minimo ed il massimo rispetto al primo ordinamento, che chiamiamo Falso e Vero, saranno rispettivamente:

F $= (\varnothing, W)$ **V** $= (W, \varnothing)$

Assegnare ad una formula α il valore **F** rappresenta il fatto che l'insieme dei mondi in cui l'affermazione α è vera è l'insieme vuoto, mentre l'insieme dei mondi in cui essa è falsa è tutto l'universo.

Assegnare il valore **V** rappresenta il fatto che l'insieme dei mondi in cui l'affermazione α è vera è tutto l'universo, mentre l'insieme dei mondi in cui essa è falsa è l'insieme vuoto.

Il minimo ed il massimo rispetto al secondo ordinamento, cioè lo Sconosciuto ($\perp$) e il Contraddittorio ($\top$), saranno rispettivamente:

$\perp = (\varnothing,\varnothing)$ $\top = (W, W)$

Il valore $(\emptyset,\emptyset)$ significa che sia l'insieme dei mondi in cui sappiamo che α è vera che l'insieme dei mondi in cui essa è falsa sono uguali all'insieme vuoto. In altre parole siamo in presenza di completa mancanza di informazione.
Assegnare il valore (W,W) rappresenta il fatto che l'informazione disponibile su α è completamente contraddittoria: infatti significa che tale informazione comporta che α è sia vera che falsa in tutto l'universo.

La negazione in questo particolare tipo di bireticolo è data da

$$\neg(X,Y) = (Y,X).$$

Se X rappresenta l'insieme dei mondi in cui sappiamo che una proposizione α è vera e Y è l'insieme dei mondi in cui sappiamo che α è falsa, allora possiamo concludere che Y è l'insieme dei mondi in cui sappiamo che $\neg\alpha$ è vera, mentre X è costituito dai mondi in cui sappiamo che $\neg\alpha$ è falsa.

Concludiamo questo paragrafo notando che se l'insieme W è costituito da un solo mondo, allora B_W si riduce al bireticolo Four, cioè al bireticolo che corrisponde alla logica del primo ordine.

3.5 La chiusura per i bireticoli dei mondi

Come abbiamo già detto, introdotta la struttura algebrica in grado di descrivere i valori di verità associati alle frasi del nostro linguaggio, dobbiamo essere in grado di eseguire la deduzione usando tali valori di verità.
A tale proposito introduciamo la nozione di "chiusura" delle valutazioni che assumono valori nei bireticoli. Con tale termine intendiamo il processo con cui costruire da una data valutazione ϕ di partenza una nuova valutazione che tenga conto di tutto ciò che è deducibile da ϕ.

Nello studio della chiusura delle funzioni di verità a più valori, risulta molto utile esaminare prima la chiusura delle valutazioni che assumono valori nei bireticoli basati sull'insieme dei mondi. Partiamo, quindi, con il considerare il bireticolo B_W. Una valutazione per tale bireticolo è una funzione

$$\phi : L \to P(W)\times P(W).$$

E' evidente che la classe delle valutazioni costituisce un bireticolo che è la potenza diretta del bireticolo B_W con insieme di indici in L. ϕ può essere proiettata nella prima componente, ottenendo, così, un'altra funzione

$$\phi_+ : L \to P(W)$$

che associa ad ogni formula α la collezione dei mondi in cui sappiamo che essa è vera.

Diremo, quindi, che $w\in \phi_+(\alpha)$ se e solo se sappiamo che α è vera in w.

Quello che abbiamo appena detto può essere facilmente interpretato come una funzione

$$\tilde{\phi}_+ : W \to P(L)$$

che dato un mondo w, produce l'insieme delle proposizioni che noi sappiamo essere vere in w.

In altre parole

$$\tilde{\phi}_+(w) = \{\alpha \mid w \in \phi_+(\alpha)\}$$

Prima di definire la nozione di chiusura di una valutazione, iniziamo con il dire quando una funzione di verità viene chiamata chiusa. Dal paragrafo 3.2 segue che uno dei requisiti che dobbiamo richiedere è che $\tilde{\phi}_+(w)$ sia chiusa (nell'usuale senso logico) per ogni mondo $w \in W$. Questo significa che ogni formula che è deducibile da formula in $\tilde{\phi}_+(w)$ appartiene già a $\tilde{\phi}_+(w)$.

Per quanto riguarda la seconda componente di ϕ, dobbiamo semplicemente richiedere che

$$\phi(\neg\alpha) = \neg\phi(\alpha) \quad \forall\alpha\in L.$$

ricordando che al secondo membro con il simbolo $\neg$ indichiamo la negazione di bireticolo.

Questo significa che nel caso in cui ϕ è chiusa, se X è l'insieme dei mondi in cui sappiamo che α è vera e Y è l'insieme dei mondi in cui sappiamo che essa è falsa, cioè $\phi(\alpha) = (X,Y)$, dobbiamo avere che $\phi(\neg\alpha) = (Y,X)$.

Arriviamo, dunque, alla seguente definizione

Definizione 3.5.1. Consideriamo una valutazione $\phi : L \to B_{W.}$

1) ϕ si dirà *deduttivamente chiusa* se $\tilde{\phi}_{+}(w)$ è deduttivamente chiusa (come un sottoinsieme di L) $\forall w \in W$.
2) ϕ si dirà *equilibrata* se $\phi(\neg\alpha) = \neg\phi(\alpha)$ $\forall \alpha \in L$.

Diremo che una valutazione è *W-chiusa* se e solo se è deduttivamente chiusa ed equilibrata.

Proposizione 3.5.1. ϕ è equilibrata se e solo se $\phi_{+}(\neg\alpha)=\phi_{-}(\alpha)$ e $\phi_{-}(\neg\alpha)=\phi_{+}(\alpha)$

Dim. $\phi(\neg\alpha) = \neg\phi(\alpha)$ se e solo se

$(\phi_{+}(\neg\alpha),\phi_{-}(\neg\alpha)) = \neg\,(\phi_{+}(\alpha),\phi_{-}(\alpha)) = (\phi_{-}(\alpha),\phi_{+}(\alpha))$

cioè se e solo se

$\phi_{+}(\neg\alpha) = \phi_{-}(\alpha)$ e $\phi_{-}(\neg\alpha) = \phi_{+}(\alpha)$

Proposizione 3.5.2. Se ϕ è equilibrata allora vale la legge della doppia negazione.

Dim. Consideriamo $\phi(\neg\neg\alpha) = (\phi_{+}(\neg\neg\alpha),\phi_{-}(\neg\neg\alpha))$

Poiché ϕ è equilibrata si ha che

$$\phi_{+}(\neg\neg\alpha) = \phi_{-}(\neg\alpha) = \phi_{+}(\alpha)$$

$$\phi_{-}(\neg\neg\alpha) = \phi_{+}(\neg\alpha) = \phi_{-}(\alpha)$$

Quindi

$$\phi(\neg\neg\alpha) = (\phi_{+}(\neg\neg\alpha),\phi_{-}(\neg\neg\alpha)) = (\phi_{+}(\alpha), \phi_{-}(\alpha)) = \phi(\alpha)$$

Ricordiamo che nella logica classica la chiusura di un dato insieme di proposizioni S (sistema di assiomi) è l'insieme dei teoremi che si possono dedurre da S. Equivalentemente possiamo definire tale chiusura come l'intersezione di tutti gli insiemi di formule chiuse per deduzione, che contengono S. Questa definizione ha senso perché l'intersezione di insiemi deduttivamente chiusi è a sua volta un insieme deduttivamente chiuso.

Lemma 3.5.1. La classe delle valutazioni W-chiuse è un sistema di chiusura nel reticolo delle valutazioni (rispetto all'ordinamento $\leq_k$).

Dim. Proviamo il lemma solo nel caso di due valutazioni W-chiuse. Facciamo vedere che se ϕ e ψ sono due valutazioni W-chiuse su un bireticolo B_W allora $\phi \cdot \psi$ è ancora W-chiusa.

Iniziamo provando che $\phi \cdot \psi$ è equilibrata.

$\phi(\alpha)=(\phi_+(\alpha),\phi_-(\alpha))$

$\psi(\alpha)=(\psi_+(\alpha),\psi_-(\alpha))$

$\phi \cdot \psi\ (\alpha)=(\phi_+(\alpha) \cap \psi_+(\alpha),\ \phi_-(\alpha) \cap \psi_-(\alpha))$

$$\begin{aligned}
\phi \cdot \psi\ (\neg\alpha) &= (\phi_+(\neg\alpha) \cap \psi_+(\neg\alpha),\ \phi_-(\neg\alpha) \cap \psi_-(\neg\alpha)) = \\
&= (\phi_+(\neg\alpha) \cap \psi_+(\neg\alpha),\ \phi_+(\neg\neg\alpha) \cap \psi_+(\neg\neg\alpha)) = \\
&= (\phi_+(\neg\alpha) \cap \psi_+(\neg\alpha),\ \phi_+(\alpha) \cap \psi_+(\alpha)) = \\
&= (\phi_-(\alpha) \cap \psi_-(\alpha),\ \phi_+(\alpha) \cap \psi_+(\alpha)) = \\
&= \neg(\phi \cdot \psi)\ (\alpha)
\end{aligned}$$

Proviamo che $\phi \cdot \psi$ è deduttivamente chiusa.

$(\phi \cdot \psi)\ \tilde{}_+(w) = \{\alpha \mid w \in (\phi \cdot \psi)_+(\alpha)\} =$

$= \{\alpha \mid w \in \phi_+(\alpha) \cap \psi_+(\alpha)\} =$

$= \phi\ \tilde{}_+(w) \cap \psi\ \tilde{}_+(w)$

Dal lemma precedente segue la definizione di W-chiusura di una valutazione.

Definizione 3.5.2. La *W-chiusura* di una valutazione ϕ definita su un bireticolo di mondi è data da

$$cl_W(\phi) = \prod \{\psi \mid \psi \geq_k \phi \text{ e } \psi \text{ è W-chiusa}\}$$

Corollario 3.5.1. Se ϕ è una valutazione definita su un bireticolo di mondi, allora $cl_W(\phi)$ è W-chiusa.

Abbiamo visto che una delle condizioni affinchè ϕ sia una valutazione *W*-chiusa è che sia chiusa la funzione $\tilde{\phi}_+$, che è stata introdotta per un particolare tipo di bireticolo, cioè $B_W = P(W) \times P(W)$.

Fino ad ora abbiamo esaminato la nozione di chiusura per i bireticoli basati sulla semantica dei mondi possibili. Volendo dare una tale nozione per un qualunque bireticolo dobbiamo procedere in modo che la definizione dipenda solo dagli ordini parziali, $\leq_t$ e $\leq_k$ e dalla negazione che caratterizzano la struttura di bireticolo. A tale scopo proviamo il seguente teorema.

Teorema 3.5.1. Una valutazione ϕ è W-chiusa se e solo se sono verificate le seguenti condizioni:

1. Se $p \models q$, allora $\phi(q) \geq_t \phi(p)$,
2. $\phi(p_1 \wedge p_2) \geq_k \phi(p_1) \cdot \phi(p_2)$,
3. $\phi(\neg p) = \neg\phi(p)$.

Dim. Dimostriamo che nel caso della semantica dei mondi possibili se una valutazione è *W*-chiusa allora sono verificate le tre proprietà del teorema. Per ipotesi vale la proprietà $\phi(\neg\alpha) = \neg\phi(\alpha)$ che coincide con la terza proprietà del teorema. Facciamo vedere, ora, che vale la prima proprietà. Consideriamo α e β tale che $\alpha \models \beta$ e supponiamo che

$\phi(\alpha)=(X,Y)$ e $\phi(\beta)=(X',Y')$

dove X è l'insieme dei mondi in cui α è ritenuta vera, mentre Y è l'insieme dei mondi in cui α è ritenuta falsa.

X' rappresenta l'insieme dei mondi in cui β è ritenuta vera, mentre Y' è l'insieme dei mondi in cui β è ritenuta falsa. In altre parole Y' è l'insieme dei mondi in cui sappiamo che $\neg\beta$ è vera, mentre X' è costituito dai mondi in cui sappiamo che $\neg\beta$ è falsa. Poiché $\alpha \models \beta$ possiamo dire che $X \subseteq X'$ e $Y' \subseteq Y$, questo equivale a dire che $\phi(\beta) \geq_t \phi(\alpha)$.

Facciamo vedere, infine, che vale la seconda proprietà del teorema. Poniamo $\phi(\alpha)=(X,Y)$, $\phi(\beta)=(X',Y')$ e $\phi(\alpha\wedge\beta) = (R,S)$, quindi $\phi(\alpha)\cdot\phi(\beta) = (X\cap X', Y\cap Y')$. Sia $w \in X\cap X'$, cioè w è un mondo in cui riteniamo vere sia α che β. Quindi α, $\beta \in \phi^{\sim}_{+}(w)$ che per ipotesi è deduttivamente chiusa, allora possiamo dire che anche $\alpha\wedge\beta \in \phi^{\sim}_{+}(w)$, cioè w è un mondo in cui riteniamo vera $\alpha\wedge\beta$. In altre parole $w \in R$. Abbiamo fatto vedere, così, che $X\cap X' \subseteq R$. Allo stesso modo possiamo dire che $Y\cap Y' \subseteq S$. Abbiamo dimostrato, quindi, che $(R,S) \geq_k (X\cap X', Y\cap Y')$ cioè $\phi(\alpha\wedge\beta) \geq_k \phi(\alpha)\cdot\phi(\beta)$.

Dimostriamo, adesso, che se valgono le tre condizioni del teorema allora ϕ è W-chiusa, cioè dobbiamo far vedere che sono verificate le proprietà della definizione 3.5.1. Per ipotesi sappiamo, già, che vale la proprietà $\phi(\neg\alpha) = \neg\phi(\alpha)$. Facciamo, vedere che $\phi^{\sim}_{+}(w)$ è deduttivamente chiusa. Posto $\alpha, \in \phi^{\sim}_{+}(w)$ con $\alpha \models \beta$, iniziamo dimostrando che anche $\beta \in \phi^{\sim}_{+}(w)$. Poiché $\alpha \models \beta$ dalla prima condizione del teorema sappiamo che $\phi(\beta) \geq_t \phi(\alpha)$. Allora $w \in \phi_{+}(\alpha) \subseteq \phi_{+}(\beta)$, quindi $\beta \in \phi^{\sim}_{+}(w)$. Consideriamo, ora, $\alpha, \beta \in \phi^{\sim}_{+}(w)$. Per la seconda condizione del teorema $\phi(\alpha\wedge\beta) \geq_k \phi(\alpha)\cdot\phi(\beta)$ e quindi $w \in \phi_{+}(\alpha) \cap \phi_{+}(\beta) \subseteq \phi_{+}(\alpha\wedge\beta)$. In altre parole $\alpha\wedge\beta \in \phi^{\sim}_{+}(w)$. Iterando il procedimento si ha che se $\alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_n \in \phi^{\sim}_{+}(w)$ allora anche $\alpha_1 \wedge \ldots\ldots \wedge \alpha_n \in \phi^{\sim}_{+}(w)$. Se, inoltre, $\alpha_1 \wedge \ldots\ldots \wedge \alpha_n \models \beta$ allora, per quello che abbiamo già dimostrato, possiamo dire che anche $\beta \in \phi^{\sim}_{+}(w)$. In conclusione $\phi^{\sim}_{+}(w)$ è deduttivamente chiusa.

Tale teorema suggerisce di estendere la definizione di valutazione chiusa ad un qualunque bireticolo al modo seguente.

Definizione 3.5.3. Dato un qualunque bireticolo, una valutazione ϕ si dice *chiusa* se :

1. Se p |= q, allora $\phi(q) \geq_t \phi(p)$,
2. $\phi(p_1 \wedge p_2) \geq_k \phi(p_1) \cdot \phi(p_2)$,
3. $\phi(\neg p) = \neg\phi(p)$.

La proprietà 1 ci dice che se $p \models q$, allora q dovrà essere vera almeno quanto p. La proprietà 2 afferma che la nostra conoscenza circa una congiunzione deve essere almeno pari alla conoscenza che abbiamo circa i singoli congiungenti.
Per rendere più chiare queste due proprietà possiamo fare un esempio: consideriamo la situazione in cui $\phi(p) = \phi(\neg p) = \bot$. Abbiamo che $\phi(p) \cdot \phi(\neg p) = \bot$, mentre $\phi(p \wedge \neg p) = \mathbf{F}$. Poiché $\bot$ rappresenta la mancanza di informazioni sarà $\mathbf{F} \geq_k \bot$. Possiamo concludere, quindi, che abbiamo più informazioni sulla congiunzione $p \wedge \neg p$, di quante ne possiamo ricavare dai valori di verità dei singoli congiungenti p e $\neg p$.
In questo caso, poiché $\mathbf{V} \models \neg(p \wedge \neg p)$, dalla proprietà 1 avremo che $\phi[\neg(p \wedge \neg p)] \geq_t \mathbf{V} \ \ \forall p$, quindi sarà $\phi[\neg(p \wedge \neg p)] = \mathbf{V}$. Dalla terza proprietà otterremo, infine, $\phi(p \wedge \neg p) = \mathbf{F}$.

Il teorema 3.5.1. ci permette di dare il seguente teorema

Teorema 3.5.2. Nel caso della semantica dei mondi possibili

$$cl_W(\phi) = \prod \{\psi \mid \psi \geq_k \phi \text{ e } \psi \text{ è chiusa}\}$$

Questa caratterizzazione dell'operatore cl_W a differenza di quella che ritroviamo nella definizione 3.5.2, dipende solo dalle nozioni interne alla teoria dei bireticoli, cioè solo dalle relazioni $\leq_k$ e $\leq_t$ e dalla negazione.

Capitolo 4
ALGORITMI DI CHIUSURA E PUNTI FISSI

4.1 Operatore di deduzione e operatore di confutazione

Nel capitolo precedente abbiamo introdotto la nozione di "valutazione chiusa" e in particolare abbiamo studiato tale nozione nella classe dei bireticoli dei mondi possibili. Sempre per tale classe, in questo capitolo, ci proponiamo di dimostrare un teorema di punto fisso che permette di calcolare le valutazioni chiuse generate da una data valutazione e che fornisce una sorta di processo di deduzione per le logiche considerate.

Supponiamo che *F* sia l'insieme delle formule del calcolo proposizionale e *B* sia l'algebra di Boole *P*(*W*) dove *W* è l'insieme dei casi passati oppure l'insieme i cui elementi sono i mondi della semantica di Kripke. In Gerla [*Fuzzy Logic*, Mathematical Tools for Approximate Reasoning, 2001] si propone la seguente nozione di operatore di deduzione.

Definizione 4.1.1 L'*operatore di deduzione* $D:B^F \rightarrow B^F$ si definisce ponendo, per ogni fuzzy sottoinsieme (B-sottoinsieme) di formule v,

$D(v)(\alpha) = W$ se α è una tautologia e

$D(v)(\alpha) = \cup\{ v(\alpha_1) \cap \ldots\ldots \cap v(\alpha_n): \alpha_1,\ldots\ldots,\alpha_n \vdash \alpha\}$ altrimenti .

Possiamo interpretare $v(\alpha)$ come l'insieme dei mondi in cui sappiamo che α è vera, oppure come l'insieme dei casi passati in cui abbiamo constatato che α è vera. $D(v)(\alpha)$ rappresenta, invece, l'insieme dei mondi (o dei casi passati) in cui l'informazione fornita da v è sufficiente a provare α.

Per il reticolo B^F utilizzeremo le notazioni insiemistiche $\cap$, $\cup$ al posto di quelle di teoria dei reticoli $\wedge$, $\vee$.

Da notare che v è un punto fisso di D se e solo se $D(v)\subseteq v$, cioè se e solo se $v(\alpha_1) \cap \ldots\ldots \cap v(\alpha_n) \subseteq v(\alpha)$ per ogni $\alpha_1,\ldots\ldots,\alpha_n$ tali che $\alpha_1,\ldots\ldots,\alpha_n \vdash \alpha$. In altre parole deve accadere che $v(\alpha)$ contiene non solo i mondi in cui so che α è vera ma anche tutti i mondi in cui le informazioni disponibili consentono di provare α. Non è difficile provare che D è un operatore di chiusura.

Proposizione 4.1.1. L'operatore D è di chiusura, cioè

i) $D(v) \supseteq v$

ii) $v \subseteq v' \Rightarrow D(v) \subseteq D(v')$ (monotonia)

iii) $D(D(v)) = D(v)$

Definizione 4.1.2. Chiamiamo *grado di inconsistenza* di v il valore Booleano

$$\mathrm{Inc}(v) = \cap_{\alpha\in F}\ D(v)(\alpha).$$

Data una contraddizione α, $Inc(v) = D(v)(\alpha)$, dove $Inc(v)$ è l'insieme dei mondi in cui l'informazione è inconsistente.

Definizione 4.1.3. Diciamo che v è *totalmente consistente* se $\mathrm{Inc}(v) = \emptyset$, e che v è *completa* se, per ogni formula α,

$$D(v)(\alpha) \cup D(v)(\neg\alpha) = W$$

Proposizione 4.1.2. Sia v una B-valutazione e α e β formule. Allora

i) $\alpha \vdash \beta \Rightarrow D(v)(\alpha) \subseteq D(v)(\beta)$.

ii) $\alpha \equiv \beta \Rightarrow D(v)(\alpha) = D(v)(\beta)$ (compatibilità con l'equivalenza logica).

iii) $D(v)(\alpha \wedge \beta) = D(v)(\alpha) \cap D(v)(\beta)$.

iv) $D(v)(\alpha \vee \beta) \supseteq D(v)(\alpha) \cup D(v)(\beta)$.

Dim. i), ii) e iv) sono evidenti. Proviamo la iii).

$D(v)(\alpha) \cap D(v)(\beta)$

$=(\cup\{v(\alpha_1) \cap\ldots\cap v(\alpha_n)\colon \alpha_1,\ldots,\alpha_n \vdash \alpha\}) \cap (\cup\{v(\beta_1) \cap\ldots\cap v(\beta_n)\colon \beta_1,\ldots,\beta_n \vdash \beta\})$

$= \cup\{ v(\alpha_1) \cap\ldots\cap v(\alpha_n) \cap v(\beta_1) \cap\ldots\cap v(\beta_n) : \alpha_1,\ldots,\alpha_n \vdash \alpha$ e $\beta_1,\ldots,\beta_n \vdash \beta \}$

$= \cup\{ v(x_1) \cap\ldots\cap v(x_h) : x_1,\ldots,x_h \vdash \alpha$ e $x_1,\ldots,x_h \vdash \beta \}$

$= \cup\{ v(x_1) \cap\ldots\cap v(x_h) : x_1,\ldots,x_h \vdash \alpha \wedge \beta \} = D(v)(\alpha\wedge\beta)$.

Proposizione 4.1.3. Per ogni mondo $w \in W$, l'insieme $\{\alpha : w \in D(v)(\alpha)\}$ è deduttivamente chiuso.

Dim. Supponiamo che $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \{\alpha : w \in D(v)(\alpha)\}$ e che $\alpha_1 \wedge\ldots\wedge \alpha_n \vdash \beta$, dobbiamo far vedere che $\beta \in \{\alpha : w \in D(v)(\alpha)\}$. Poiché $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \{\alpha : w \in D(v)(\alpha)\}$ si ha che $w \in D(v)(\alpha_1),\ldots,w \in D(v)(\alpha_n)$. Dalla iii) della proposizione 4.1.2. segue che $w \in D(v)(\alpha_1) \cap\ldots\cap D(v)(\alpha_n) = D(v)(\alpha_1 \wedge\ldots\wedge \alpha_n)$ per cui $\alpha_1 \wedge\ldots\wedge \alpha_n \in \{\alpha : w \in D(v)(\alpha)\}$. Per ipotesi $\alpha_1 \wedge\ldots\wedge \alpha_n \vdash \beta$ e, per la i) della proposizione 4.1.2, $w \in D(v)(\alpha_1 \wedge\ldots\wedge \alpha_n) \subseteq D(v)(\beta)$, quindi possiamo concludere dicendo che $\beta \in \{\alpha : w \in D(v)(\alpha)\}$.

E' possibile anche definire un operatore D^* che in un certo senso è il duale di *D*.

Definizione 4.1.4. Chiamiamo *operatore di confutazione* l'operatore D^* ottenuto ponendo

$D^*(v)(\alpha) = W$ se α è una contraddizione e

$D^*(v)(\alpha) = \cup\{v(\alpha_1) \cap \ldots \cap v(\alpha_n)\colon \neg\alpha_1,\ldots,\neg\alpha_n \vdash \neg\alpha\}$ altrimenti .

In tale caso interpretiamo $v(\alpha)$ come l'insieme dei mondi (o dei casi pasati) in cui sappiamo che α è falsa. $D^*(v)(\alpha)$ rappresenta, invece, l'insieme dei mondi in cui l'informazione fornita da v è sufficiente a confutare α.

Proposizione 4.1.4. L'operatore D* verifica le seguenti proprietà

i) $D^*(v) \supseteq v$

ii) $v \subseteq v' \Rightarrow D^*(v) \subseteq D^*(v')$ (monotonia)

Proposizione 4.1.5. Se $v(\alpha) = v(\neg\neg(\alpha))$ allora risulta che

$$D^*(v)(\alpha) = D(v^*)(\neg\alpha)$$

dove

$$v^*(\beta) = v(\neg\beta).$$

Dim.

$$\begin{aligned} D(v^*)(\neg\alpha) &= \cup\{ v^*(\alpha_1) \cap \ldots.. \cap v^*(\alpha_n) : \alpha_1,\ldots\ldots.,\alpha_n \vdash \neg\alpha\} \\ &= \cup\{v(\neg\alpha_1) \cap \ldots.. \cap v(\neg\alpha_n) : \alpha_1,\ldots\ldots.,\alpha_n \vdash \neg\alpha\} \\ &= \cup\{v(\neg\neg\alpha_1) \cap \ldots.. \cap v(\neg\neg\alpha_n) : \neg\alpha_1,\ldots\ldots.,\neg\alpha_n \vdash \neg\alpha\} \\ &= \cup\{v(\alpha_1) \cap \ldots.. \cap v(\alpha_n) : \neg\alpha_1,\ldots\ldots.,\neg\alpha_n \vdash \neg\alpha\}. \end{aligned}$$

E' evidente che $D^*(v)$ è compatibile con l'equivalenza logica. I punti fissi di D^* sono le valutazioni v tali che $v(\alpha_1)\cap \ldots.. \cap v(\alpha_n) \subseteq v(\alpha)$ per ogni $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ tali che : $\neg\alpha_1,\ldots\ldots.,\neg\alpha_n \vdash \neg\alpha$

4.2 Teorema fondamentale sulle valutazioni chiuse

Ricordiamo che con B_W abbiamo indicato il bireticolo prodotto dell'algebra di Boole $P(W)$ per se stessa. In tale bireticoli è interessante considerare il seguente operatore.

Definizione 4.2.1. Indichiamo con K : $B_W^F \to B_W^F$ l'operatore che associa ad ogni valutazione $\phi : F \to B_W$ la valutazione

$$K(\phi) = (D(\phi_+), D^*(\phi_-)).$$

Indichiamo con H l'operatore che associa ad ogni valutazione $\phi : F \to B_W$ la valutazione $H(\phi)$: $F \to B_W$ definita ponendo

$$H(\phi)(\alpha) = (\phi_+(\alpha) \cup \phi_-(\neg\alpha), \phi_+(\neg\alpha) \cup \phi_-(\alpha)).$$

Siamo interessati alla composizione di tali operatori, cioè all'operatore T :$B_W^F \to B_W^F$ definito ponendo

$$T(\phi)(\alpha) = H(K(\phi))(\alpha) = (D(\phi_+)(\alpha) \cup D^*(\phi_-)(\neg\alpha), D^*(\phi_-)(\alpha) \cup D(\phi_+)(\neg\alpha)).$$

Teorema 4.2.1. (teorema fondamentale sulle valutazioni chiuse).
Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

a) ϕ è una valutazione chiusa
b) ϕ è un punto fisso sia di H che di K
c) ϕ è un punto fisso di $T = H \circ K$.

Dim. Iniziamo facendo veder che vale *a)* $\Rightarrow$ *b)* Supponiamo che ϕ sia una valutazione chiusa. Allora essendo ϕ deduttivamente chiusa, $D(\phi_+) = \phi_+$. Inoltre, essendo ϕ equilibrata,

$$\phi_-^*(\neg\alpha) = \phi_-(\neg\neg\alpha) = \phi_-(\alpha) = \phi_+(\neg\alpha)$$

e quindi per la legge di doppia negazione $\phi_-^* = \phi_+$. Pertanto

$$D^*(\phi_-)(\alpha) = D(\phi_-^*)(\neg\alpha) = D(\phi_+)(\neg\alpha) = \phi_+(\neg\alpha) = \phi_-(\alpha).$$

Quindi

$$K(\phi) = (D(\phi_+), D^*(\phi_-)) = (\phi_+, \phi_-) = \phi$$

In altre parole ϕ è un punto fisso per *K.*

Per provare la chiusura rispetto *H* osserviamo che, essendo ϕ equilibrata,

$$\phi_+(\neg\alpha) = \phi_-(\alpha) \text{ e } \phi_-(\neg\alpha) = \phi_+(\alpha),$$

da questo segue che

$$\phi_+(\neg\alpha)\cup\phi_-(\alpha) = \phi_-(\alpha) \text{ e } \phi_+(\alpha)\cup\phi_-(\neg\alpha)=\phi_+(\alpha).$$

Risulta, allora, verificata l'uguaglianza

$$H(\phi)(\alpha) = (\phi_+(\alpha)\cup\phi_-(\neg\alpha),\ \phi_+(\neg\alpha)\cup\phi_-(\alpha)) = (\phi_+(\alpha),\phi_-(\alpha)),$$

cioè ϕ è un punto fisso per H.

Proviamo che *b)* $\Rightarrow$ *a)*. Supponiamo che ϕ sia un punto fisso di entrambi gli operatori, allora dal fatto che ϕ è punto fisso di K si ricava che

$$K(\phi) = (D(\phi_+), D^*(\phi_-)) = \phi = (\phi_+,\phi_-)$$

e quindi $D(\phi_+) = \phi_+$. Ciò comporta che ϕ è deduttivamente chiusa. Dal fatto che ϕ è punto fisso di H si ricava che, per ogni formula α,

$$H(\phi)(\alpha) = (\phi_+(\alpha)\cup\phi_-(\neg\alpha),\ \phi_+(\neg\alpha)\cup\phi_-(\alpha)) = (\phi_+(\alpha),\phi_-(\alpha))$$

e quindi

$$\phi_+(\alpha)\cup\phi_-(\neg\alpha) = \phi_+(\alpha) \text{ e } \phi_+(\neg\alpha)\cup\phi_-(\alpha) = \phi_-(\alpha). \qquad (1)$$

Applicando tali eguaglianze alla formula $\neg\alpha$,

$$\phi_+(\neg\alpha)\cup\phi_-(\neg\neg\alpha) = \phi_+(\neg\alpha) \text{ e } \phi_+(\neg\neg\alpha)\cup\phi_-(\neg\alpha) = \phi_-(\neg\alpha). \qquad (2)$$

Stante la compatibilità di ϕ_+ e ϕ_- con l'equivalenza logica, da (1) e (2) si ha che

$$\phi_-(\neg\alpha) = \phi_+(\neg\neg\alpha)\cup\phi_-(\neg\alpha) = \phi_+(\alpha)\cup\phi_-(\neg\alpha) = \phi_+(\alpha)$$

$$\phi_+(\neg\alpha) = \phi_+(\neg\alpha)\cup\phi_-(\neg\neg\alpha) = \phi_+(\neg\alpha)\cup\phi_-(\alpha) = \phi_-(\alpha)$$

cioè ϕ è equilibrata, in altre parole valgono le due uguaglianze

$$\phi_+(\neg\alpha) = \phi_-(\alpha) \text{ e } \phi_-(\neg\alpha) = \phi_+(\alpha).$$

Poiché abbiamo dimostrato che ϕ è deduttivamente chiusa ed equilibrata, possiamo concludere dicendo che ϕ è chiusa.

Dimostriamo, ora, che *b)* $\Rightarrow$ *c)*. Supponiamo che ϕ sia un punto fisso di H e di K. Essendo ϕ un punto fisso di K si ha che $T(\phi) = H(K(\phi)) = H(\phi)$. Poiché ϕ è anche un punto fisso di H, allora $T(\phi) = H(\phi) = \phi$. Quindi ϕ è anche un punto fisso di T.

Infine proviamo che *c)* $\Rightarrow$ *b)*. Supponiamo che ϕ sia un punto fisso di T, cioè

$$T(\phi)(\alpha) = (D(\phi_+)(\alpha)\cup D^*(\phi_-)(\neg\alpha), D^*(\phi_-)(\alpha)\cup D(\phi_+)(\neg\alpha)) = (\phi_+(\alpha),\phi_-(\alpha))$$

Si ha che $D(\phi_+)(\alpha)\cup D^*(\phi_-)(\neg\alpha) = \phi_+(\alpha)$ e $D^*(\phi_-)(\alpha)\cup D(\phi_+)(\neg\alpha) = \phi_-(\alpha)$, da cui segue che $\phi_+ \supseteq D(\phi_+)$ e $\phi_- \supseteq D^*(\phi_-)$.

Dalla proposizione 4.1.1 sappiamo che $\phi_+ \subseteq D(\phi_+)$, e per la proposizione 4.1.4. vale anche $\phi_- \subseteq D^*(\phi_-)$. Possiamo, allora, dire che $\phi_+ = D(\phi_+)$ e $\phi_- = D^*(\phi_-)$. In altre parole

$$K(\phi) = (D(\phi_+), D^*(\phi_-)) = (\phi_+, \phi_-)= \phi$$

cioè ϕ è un punto fisso per K.

Inoltre $H(K(\phi)) = H(\phi)$. Per ipotesi si ha che $\phi = T(\phi) = H(K(\phi)) = H(\phi)$. Essendo $\phi = H(\phi)$ possiamo concludere che ϕ è anche un punto fisso per H.

Il teorema che abbiamo appena dimostrato fa spostare la nostra attenzione sull'operatore T, in particolare sulla ricerca dei suoi punti fissi. Questo problema viene affrontato nei dettagli nel successivo paragrafo.

4.3 Teorema di punto fisso

Nel paragrafo precedente abbiamo definito due operatori H e K, ed un terzo operatore T dato dalla composizione dei primi due. In generale T non è un operatore di chiusura, ma abbiamo visto che una valutazione ϕ è chiusa se e solo se è un punto unito di tale operatore. Il nostro problema diventa, quindi, quello di trovare come sono fatti i punti fissi di T. A tale scopo dimostriamo alcune proprietà che sono verificate da T.

Proposizione 4.3.1. Per ogni valutazione ϕ, $T(\phi) \geq_k \phi$.

Dim. Dalla proposizione 4.1.1 sappiamo che $\phi_+ \subseteq D(\phi_+)$, e per la proposizione 4.1.4. vale anche $\phi_- \subseteq D^*(\phi_-)$. Quindi

$$T(\phi)(\alpha) = (D(\phi_+)(\alpha)\cup D^*(\phi_-)(\neg\alpha), D^*(\phi_-)(\alpha)\cup D(\phi_+)(\neg\alpha))$$
$$\geq_k (\phi_+(\alpha)\cup\phi_-(\neg\alpha),\phi_-(\alpha)\cup\phi_+(\neg\alpha))$$

Poiché $\phi_+(\alpha)\cup\phi_-(\neg\alpha) \supseteq \phi_+$ e $\phi_-(\alpha)\cup\phi_+(\neg\alpha) \supseteq \phi_-(\alpha)$, possiamo concludere che

$$(\phi_+(\alpha)\cup\phi_-(\neg\alpha), \phi_-(\alpha)\cup\phi_+(\neg\alpha)) \geq_k (\phi_+(\alpha), \phi_-(\alpha)) = \phi(\alpha).$$

In altre parole $T(\phi) \geq_k \phi$.

Proposizione 4.3.2. L'operatore T è monotono rispetto l'ordinamento $\geq_k$.

Dim. Consideriamo due valutazioni ϕ e ψ tali che $\phi \leq_k \psi$, dimostriamo che $T(\phi) \leq_k T(\psi)$. La disuguaglianza $\phi(\alpha) \leq_k \psi(\alpha)$ può essere scritta anche nel seguente modo $(\phi_+(\alpha), \phi_-(\alpha)) \leq_k (\psi_+(\alpha), \psi_-(\alpha))$ da cui segue che $\phi_+(\alpha) \subseteq \psi_+(\alpha)$ e $\phi_-(\alpha) \subseteq \psi_-(\alpha)$. Poiché quest'ultima affermazione vale per ogni α , allora vale anche per $\neg\alpha$, cioè $\phi_+(\neg\alpha) \subseteq \psi_+(\neg\alpha)$ e $\phi_-(\neg\alpha) \subseteq \psi_-(\neg\alpha)$. La proposizione 4.1.1 e la proposizione 4.1.4. ci assicurano rispettivamente la monotonia di D e di D^* , allora

$$D(\phi_+)(\alpha)\cup D^*(\phi_-)(\neg\alpha) \subseteq D(\psi_+)(\alpha)\cup D^*(\psi_-)(\neg\alpha),$$

e

$$D^*(\phi_-)(\alpha)\cup D(\phi_+)(\neg\alpha) \subseteq D^*(\psi_-)(\alpha)\cup D(\psi_+)(\neg\alpha).$$

Quindi

$$T(\phi)(\alpha) = (D(\phi_+)(\alpha)\cup D^*(\phi_-)(\neg\alpha), D^*(\phi_-)(\alpha)\cup D(\phi_+)(\neg\alpha))$$
$$\leq_k (D(\psi_+)(\alpha)\cup D^*(\psi_-)(\neg\alpha), D(\psi_-)(\alpha)\cup D(\psi_+)(\neg\alpha)) = T(\psi)(\alpha).$$

In altre parole $T(\phi) \leq_k T(\psi)$.

Proposizione 4.3.3. Sia D che D^* sono operatori continui nel reticolo completo e completamente distributivo $P(W)^F$.

Dim. Consideriamo una successione di valutazioni $(v_n)_{n\in N}$ crescente dove $v_n : F\rightarrow P(W)$ $\forall n\in N$. Proviamo che

$$\cup_{n\in N}\ D(v_n) = D(\cup_{n\in N}\ v_n).$$

Ora osserviamo che essendo la famiglia di valutazioni crescente, un valore del tipo $v_{n(1)}(\alpha_1) \cap \ldots.. \cap v_{n(s)}(\alpha_s)$ è maggiorato da $v_n(\alpha_1) \cap \ldots.. \cap v_n(\alpha_s)$ dove $n = \mathrm{Max}\{n(1),...,n(s)\}$. Pertanto, tenendo conto della proprietà distributiva, otteniamo che

$$\begin{aligned} D(\cup_{n\in N}\ v_n)\ (\alpha) &= \cup\{(\cup_{n\in N}\ v_n)(\alpha_1) \cap \ldots.. \cap (\cup_{n\in N}\ v_n)(\alpha_s) : \alpha_1,\ldots\ldots.,\alpha_s \vdash \alpha\} \\ &= \cup\{\cup_{n(1),...,n(s)}\,(v_{n(1)}(\alpha_1) \cap \ldots.. \cap v_{n(s)}(\alpha_s)\,) : \alpha_1,\ldots\ldots.,\alpha_s \vdash \alpha\} \\ &= \cup\{\cup_{n\in N}(\ v_n(\alpha_1) \cap \ldots.. \cap v_n(\alpha_s)\,) : \alpha_1,\ldots\ldots.,\alpha_s \vdash \alpha\} \\ &= \cup_{n\in N}\ (\ \cup\{\ v_n(\alpha_1) \cap \ldots.. \cap v_n(\alpha_s)\ : \alpha_1,\ldots\ldots.,\alpha_s \vdash \alpha\}) \\ &= \cup_{n\in N}\ D(v_n)\ (\alpha). \end{aligned}$$

Allo stesso modo si può dimostrare la continuità di D^*.

Proposizione 4.3.4. $K : B_W^F \rightarrow B_W^F$ è un operatore continuo rispetto a $\leq_k$.

Dim. Consideriamo la successione $(\phi^n)_{n\in N} = ((\phi_+^{\,n},\ \phi_-^{\,n}))_{n\in N}$ e supponiamo che sia crescente rispetto l'ordinamento $\leq_k$. Allora sono crescenti anche le famiglie $(\phi_+^{\,n})_{n\in N}$ e $(\phi_-^{\,n})_{n\in N}$, inoltre si ha che

$$\cup_{n\in N}\ \phi^n = \cup_{n\in N}\ (\phi_+^{\,n},\ \phi_-^{\,n}) = (\cup_{n\in N}\ \phi_+^{\,n}, \cup_{n\in N}\ \phi_-^{\,n}),$$

dove con il simbolo insiemistico $\cup$ abbiamo indicato l'estremo superiore rispetto all'ordinamento $\leq_k$. Proviamo che

$$K(\cup_{n\in N}\ \phi^n) = \cup_{n\in N}\ K(\phi^n).$$

Dalla continuità di D e D^* si ha che

$$\begin{aligned} \cup_{n\in N}\ K(\phi^n) &= \cup_{n\in N}\ (D(\phi_+^{\,n}), D^*(\phi_-^{\,n})) \\ &= (\cup_{n\in N}\ D(\phi_+^{\,n}), \cup_{n\in N}\ D^*(\phi_-^{\,n})) \\ &= (D(\cup_{n\in N}\ \phi_+^{\,n}), D^*(\cup_{n\in N}\ \phi_-^{\,n})) \\ &= \cup_{n\in N}\ K(\phi^n). \end{aligned}$$

Proposizione 4.3.5. H : $B_W^F \rightarrow B_W^F$ è un operatore continuo rispetto a $\leq_k$.

Dim. Consideriamo la successione crescente $(\phi^n)_{n\in N} = ((\phi_+^n, \phi_-^n))_{n\in N,}$ e tenendo conto che, per la crescenza

$$(\phi^n)_{n\in N}, (\phi_+^n(\alpha) \cup \phi_-^m(\neg\alpha) \leq_k (\phi_+^{Max\{m,n\}}(\alpha) \cup \phi_-^{Max\{m,n\}}(\neg\alpha),$$

abbiamo che

$$H(\cup_{n\in N} \phi^n)(\alpha) =((\cup_{n\in N} \phi_+^n)(\alpha)\cup(\cup_{n\in N} \phi_-^n)(\neg\alpha),(\cup_{n\in N} \phi_+^n)(\neg\alpha)\cup(\cup_{n\in N}\phi_-^n)(\alpha))$$

$$= (\cup_{n\in N} (\phi_+^n(\alpha) \cup \phi_-^n(\neg\alpha)), \cup_{n\in N} (\phi_+^n(\neg\alpha) \cup \phi_-^n(\alpha)))$$

$$= \cup_{n\in N} (\phi_+^n(\alpha) \cup \phi_-^n(\neg\alpha), \phi_+^n(\neg\alpha) \cup \phi_-^n(\alpha))$$

$$= \cup_{n\in N} H(\phi^n).$$

Proposizione 4.3.6. T è continuo.

Dim. Basta osservare che il prodotto di due operatori continui è ancora un operatore continuo. Più direttamente data la successione crescente $(\phi^n)_{n\in N} = ((\phi_+^n, \phi_-^n))_{n\in N}$, per la continuità di *K* e *H* si ha

$$\cup_{n\in N} T(\phi^n) = \cup_{n\in N} H(K(\phi^n)) = H(\cup_{n\in N} K(\phi^n)) = H(K(\cup_{n\in N} \phi^n)) = T(\cup_{n\in N} \phi^n).$$

Proposizione 4.2.7. Per ogni valutazione ϕ risulta che

$$T(\cup_{n\in N} T^n(\phi)) = \cup_{n\in N} T(T^n(\phi)).$$

Dim. Iniziamo vedendo come è definita la successione $(T^n(\phi))_{n\in N}$.

$T^1(\phi) = T(\phi)$,

$T^2(\phi) = T(T(\phi))$,

………….

$T^{1+n}(\phi) = T(T^n(\phi))$.

Tale successione $(T^n(\phi))_{n\in N}$ è crescente rispetto l'ordinamento $\geq_k$. Infatti $T(\phi)) \geq_k \phi$ e per la monotonia di *T*, $T^2(\phi)\geq_k T(\phi)$. Ripetendo tale osservazione, si prova che $T^n(\phi)) \geq_k T^{n-1}(\phi))$ e quindi che la successione è crescente. Inoltre, per la continuità di *T*, ponendo

$$\phi^n = T^n(\phi) \quad \forall n\in N,$$

risulta

$$T(\cup_{n\in N}\ T^n(\phi)) = T(\cup_{n\in N}\ \phi^n) = \cup_{n\in N}\ T(\phi^n) = \cup_{n\in N}\ T(T^n(\phi)).$$

Teorema 4.3.1. Sia ϕ una valutazione , allora $\cup_{n\in N} T^n(\phi)$ è un punto fisso per T, precisamente il minimo punto fisso maggiore di ϕ (rispetto $\geq_k$).

Dim. Basta osservare che

$$\begin{aligned} T(\cup_{n\in N}\ T^n(\phi)) &= \cup_{n\in N}\ T(T^n(\phi)) \\ &= \cup_{n\in N}\ T^{1+n}(\phi) \\ &= \cup_{n\in N}\ T^n(\phi). \end{aligned}$$

E' ovvio che $\phi \leq_k \cup_{n\in N}\ T^n(\phi)$. Per mostrare che $\cup_{n\in N} T^n(\phi)$ è il minimo punto unito di *T* maggiore di ϕ (rispetto $\geq_k$), supponiamo che ψ sia un punto fisso di *T*, tale che $\phi \leq_k \psi$. Allora, per la monotonia di *T*, $T(\phi) \leq_k T(\psi) = \psi$. Da tale disuguaglianza, ancora per la monotonia di *T* si ha che $T^2(\phi) \leq_k T(\psi) = \psi$. Proseguendo in questo modo si prova che $T^n(\phi) \leq_k \psi$ per ogni $n\in N$ e quindi $\cup_{n\in N}\ T^n(\phi) \leq_k \psi$.

Riferimenti bibliografici

SCHÖTER A., “Evidential bilattice logic and lexical inference”, www.informatik.uni-trier.de , settembre 2005.

FITTING M., “Kleene’s logic generalized”, www.comet.lehman.cuny.edu, settembre 2005.

FITTING M., “Bilattices in logic programming”, www.comet.lehman.cuny.edu, settembre 2005.

FITTING M., “Bilattices and semantics of logic programming” , www.comet.lehman.cuny.edu, settembre 2005.

MOBASHER B.- PIGOZZI D.- SLUTZKI G.-VOUTSADAKIS G., “A duality theory for bilattices”, http://citeseer.ist.psu.edu , settembre 2005.

PILITOWSKA A., “Interval bilattices and some other simple bilattices”, www.atlas_conferences.com , settembre 2005.

GINSBERG M.L., "Multivalued logics: a uniform approach to inference in artificial intelligence", http://citeseerx.ist.psu.edu, Computer Intelligence, 1988.

GERLA G., “Fuzzy logic, Mathematical tools for Approximate Reasoning", Kluwer Academic publishers, Trends in Logic, Studia Logica Library, volume 11.