

CALCOLO PROPOSIZIONALE

Per proposizione di un linguaggio intendiamo un'espressione di quel linguaggio che sia vera o falsa, per esempio espressioni come: "3 è un numero pari", "Napoli è una città".

In genere questo non accade per un'espressione di un linguaggio, eppure l'espressione in questione non è priva di significato. Per esempio, espressioni imperative, pur non essendo né vere né false, si possono considerare significative.

Il calcolo proposizionale studia certe locuzioni, dette connettivi, mediante cui sono formate proposizioni più complesse a partire da proposizioni semplici. I connettivi proposizionali fondamentali sono "non", in simboli " \sim ", "e" in simboli " \wedge ", "o" in simboli " \vee ", "se...allora" in simboli " \rightarrow ", "se e solo se" in simboli " \equiv ".

Abitualmente i connettivi \sim , \wedge , \vee , \rightarrow , \equiv sono chiamati negazione, congiunzione, disgiunzione, condizionale e equivalenza, rispettivamente.

Indichiamo le proposizioni semplici con delle lettere maiuscole chiamate lettere enunciative.

I connettivi che introdurremo sono delle operazioni vero-funzionali, ciò significa che l'applicazione delle operazioni modifica la falsità o la verità delle proposizioni coinvolte.

Useremo la lettera V per indicare la verità e la lettera F per indicare la falsità di una proposizione.

Ogni operazione è una funzione che può essere rappresentata mediante una tabella.

Definiamo la *negazione* mediante la tavola:

A	\sim A
V	F
F	V

La tabella descrive una funzione del tipo:
 $\sim: \{ V, F \} \rightarrow \{ V, F \}$.

Introduciamo la *coniunzione* (di A e B) $A \wedge B$:

A	B	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

In questo modo abbiamo definito una funzione:

$$\wedge: \{V, F\}^2 \rightarrow \{V, F\}.$$

Analogamente, introduciamo la *disgiunzione* $A \vee B$:

A	B	$A \vee B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Il *condizionale*:

A	B	$A \rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Infine definiamo il connettivo *bicondizionale* o *equivalenza* $A \equiv B$:

A	B	$A \equiv B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Elementi di Calcolo Proporzionale

I connettivi logici introdotti, quindi, sono: $\wedge, \vee, \sim, \rightarrow, \equiv$.

Le lettere enunciative sono dei simboli a cui assegneremo esclusivamente il valore V o F.

Applicando i connettivi logici alle lettere enunciative avremo le forme enunciative (a volte semplicemente chiamate forme o formule).

Invero:

1. Tutte le lettere enunciative sono forme enunciative;
2. Se A e B sono forme enunciative allora anche $A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B, A \equiv B$ sono forme enunciative;
3. Solo forme ottenute applicando la 1. e la 2., un numero finito di volte, sono forme enunciative.

Ad ogni forma enunciativa si associa una funzione ovvero una tabella.

Ad esempio, alla forma enunciativa $((A_1 \vee \sim A_2) \wedge A_3) \rightarrow A_2$ resta associata una funzione del tipo $\{V, F\}^3 \rightarrow \{V, F\}$:

A	A	A	$\sim A_2$	$A_1 \vee \sim A_2$	$(A_1 \vee \sim A_2) \wedge A_3$	$((A_1 \vee \sim A_2) \wedge A_3) \rightarrow A_2$
1	2	3				
V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	F	V	F	V
V	F	V	V	V	V	F
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	F	F	F	V
F	V	F	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V	F
F	F	F	V	V	F	V

Chiamiamo *funzione di verità* in n variabili una funzione del tipo: $\{V, F\}^n \rightarrow \{V, F\}$.

Le forme enunciative che presentano sempre risultato V sono dette forme tautologiche, o semplicemente tautologie.

Un esempio di tautologia è la forma enunciativa $A \vee (\sim A)$. Infatti si ha:

A	$\sim A$	$A \vee (\sim A)$
V	F	V
F	V	V

Definizione.

Diciamo che la forma A *implica logicamente* la forma B se e solo se $A \rightarrow B$ è una tautologia.

Diciamo che la forma A è *logicamente equivalente* alla forma B se e solo se $A \equiv B$ è una tautologia.

Osserviamo che l'implicazione logica e l'equivalenza logica sono delle relazioni tra forme enunciative.

Le tavole di verità costituiscono una procedura effettiva che ci permette di determinare se una forma enunciativa è una tautologia oppure no.

Proposizione 1

A e B sono logicamente equivalenti se e solo se nelle tavole di verità di A e B le colonne sotto A e B sono le stesse.

Dimostrazione.

Dal fatto che A e B sono logicamente equivalenti segue che $A \equiv B$ è una tautologia. Ciò significa che nell'ultima colonna della tavola di verità della forma enunciativa $A \equiv B$ compare solo il valore V .

Osserviamo che nella tavola dell'operazione \equiv le uniche combinazioni che danno risultato V sono le combinazioni VV e FF .

Quindi l'unica possibilità è che il risultato della tavola di verità di A corrisponda con quello di B .

Viceversa, se la colonna sotto A è uguale a quella sotto B , allora quando andremo a determinare la tavola di verità di $A \equiv B$ ci troveremo ad applicare l'operazione \equiv alle coppie del tipo VV oppure FF , la quale, in entrambi i casi, ha risultato V . Da ciò segue che $A \equiv B$ è una tautologia.

Le contraddizioni sono le formule che hanno nell'ultima colonna della tavola di verità tutti valori F .

Proposizione 2.

Siano A e $A \rightarrow B$ tautologie. Allora anche B è una tautologia.

Dimostrazione.

Assumiamo che A e $A \rightarrow B$ siano tautologie.

Ragionando per assurdo, supponiamo che B non sia una tautologia. Quindi assumiamo che compaia un simbolo F nella tavola di verità, nella colonna sotto B . Per l'assegnamento di variabili per cui B ammette valore F , nella colonna sotto A vi sarà una V (per ipotesi), e quindi $A \rightarrow B$ avrà risultato F . Questo è assurdo in quanto $A \rightarrow B$ è, per ipotesi, una tautologia.

Proposizione 3.

Sia A una tautologia, siano A_1, \dots, A_n le lettere enunciative occorrenti in A . Sia B la forma enunciativa ottenuta da A sostituendo le lettere enunciative A_1, \dots, A_n con le forme enunciative A_1, \dots, A_n , rispettivamente. Allora B è una tautologia.

Dimostrazione.

Assumiamo che A sia una tautologia. Per ogni assegnamento di valori di verità alle lettere enunciative in B , le forme enunciative A_1, \dots, A_n hanno valori x_1, \dots, x_n , dove $x_i \in \{V, F\}$ per ogni $i = 1, 2, \dots, n$. Assegnando questi valori x_1, \dots, x_n a A_1, \dots, A_n , rispettivamente, si ottiene il risultante valore di verità per A , che è il valore di verità di B . Poiché A è una tautologia, allora B risulterà una tautologia.

Proposizione 4

Sia B_1 una forma enunciativa ottenuta dalla forma enunciativa A_1 sostituendo la forma B ad una o più occorrenze di A . Allora $(A \equiv B) \rightarrow (A_1 \equiv B_1)$ è una tautologia.

Dimostrazione.

Per un assegnamento di valori di verità tali che A e B abbiano valori di verità opposti si avrà che $A \equiv B$ avrà valore F e quindi $(A \equiv B) \rightarrow (A_1 \equiv B_1)$ avrà valore V . Per un assegnamento di valori di verità tale che A e B abbiano valori uguali, poiché B_1 differisce da A_1 solo nel fatto di contenere B in qualche posto dove A_1 contiene A , allora A_1 e B_1 avranno uguali valori di verità.

Così, in questo caso, il risultante valore di $A \equiv B$ è V , come pure il valore di $A_1 \equiv B_1$ è V . Allora risulterà V anche il valore di $(A \equiv B) \rightarrow (A_1 \equiv B_1)$.

Uso delle parentesi

Imponiamo le seguenti priorità ai connettivi \wedge , \vee , \sim , \rightarrow , \equiv , ovvero scriviamo i connettivi nell'ordine dalla più alta a quella più bassa: \sim , \wedge , \vee , \rightarrow , \equiv . La stipulazione di questo ordine permette talvolta la cancellazione di parentesi in una forma proposizionale.

Un esempio di cancellazione delle parentesi è dato da:

$$(((A \vee (\sim B)) \rightarrow C) \equiv A)$$

$$(((A \vee \sim B) \rightarrow C) \equiv A)$$

$$((A \vee \sim B \rightarrow C) \equiv A)$$

$$(A \vee \sim B \rightarrow C \equiv A)$$

$$A \vee \sim B \rightarrow C \equiv A .$$

Non sempre si possono cancellare tutte le parentesi.

Infatti, nell'esempio è stato possibile perché le operazioni, grazie alle priorità poste vengono svolte nel modo indicato dalle parentesi.

Osserviamo che diverse forme possono descrivere la stessa funzione.

Infatti,

supponiamo che A sia logicamente equivalente a B, quindi A e B hanno la stessa tavola di verità. Poiché una tavola di verità descrive una funzione, quindi A e B descrivono la stessa funzione di verità.

Consideriamo una funzione di verità con n variabili, $f(x_1 \dots x_n)$.

$x_1 \dots x_n$	$f(x_1 \dots x_n)$
VV...FF	V
⋮	⋮
FF...FF	F

Ci poniamo il problema di trovare una forma enunciativa che descriva tale funzione. Invero si ha:

Teorema 1.

Data una funzione di verità $f(x_1, \dots, x_n)$ esiste sempre una formula contenente solo i simboli $\{\wedge, \vee, \sim\}$ la cui tabella coincide con quella della funzione data.

Dimostrazione.

Sia $f(x_1, \dots, x_n)$ una funzione di verità, è evidente che f può essere rappresentata da una tavola di verità formata da 2^n righe. Scegliamo una riga, diciamo la i -ma riga. Se nel posto j -mo la tavola presenta il valore V (cioè x_j assume V) allora scriviamo A_j . Se invece al j -mo posto troviamo il valore F allora scriviamo $\sim A_j$.

Così scriveremo u_j^i per indicare A_j oppure $\sim A_j$ nella riga i -ma. Poniamo:

$$c_i = u_1^i \wedge u_2^i \wedge \dots \wedge u_n^i.$$

Sia D la disgiunzione di tutte quelle c_i tali che f assume V per la i -ma riga. Se non vi sono tali righe (cioè f assume sempre F) poniamo $D = A_1 \wedge \sim A_1$. Affermiamo che D genera f . Infatti, assegniamo valori di verità alle lettere $A_1 \dots A_n$. Supponiamo che la riga k -ma nella tavola di verità di f contempli il vettore $x_1 \dots x_n$. Allora c_k ha il valore V , mentre ogni c_i con $i \neq k$ ha valore F quando alla formula c_i si associano i valori del vettore k -mo. Se f ha valore V alla riga k -ma. Allora c_k è un disgiunto di D , e quindi D avrà valore V . Se f ha valore F alla k -ma riga allora c_k non è disgiunto di D e tutti i disgiunti di D avranno valore F . Quindi D avrà valore F . Così per ogni altra assegnazione.

Chiamiamo letterale una variabile o la negazione di una variabile. Allora il risultato precedente ci dice che ogni funzione di verità con n variabili è descrivibile mediante una formula che è una disgiunzione di congiunzioni di letterali. Dualmente si ha anche che una funzione di verità si può descrivere mediante una formula che è una congiunzione di disgiunzioni di letterali.

Osserviamo che si può provare che basta solo l'insieme di connettivi $\{\wedge, \sim\}$ per descrivere, mediante forme proposizionali, ogni arbitraria funzione di verità.

Esempio 1.

Partiamo dalla tabella:

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
V	V	F
F	V	V
V	F	V
F	F	V

Scriviamo un algoritmo che determini una formula che descriva una funzione di verità:

1. Consideriamo tutte le righe il cui risultato sia V. (Nell'esempio riga 2, 3, 4)).
2. Scriviamo le variabili in forma vera se è assegnato V e in forma negata se è assegnato F nelle righe considerate. (Nell'esempio: $(\sim x_1, x_2)$, $(x_1, \sim x_2)$, $(\sim x_1, \sim x_2)$).
3. Inseriamo tra le variabili l'operatore congiunzione. (Nell'esempio: $\sim x_1 \wedge x_2$, $x_1 \wedge \sim x_2$, $\sim x_1 \wedge \sim x_2$).
4. Inseriamo tra queste formule l'operatore disgiunzione. (Nell'esempio: $(\sim x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \sim x_2) \vee (\sim x_1 \wedge \sim x_2)$).

Abbiamo ottenuto la formula:

$(\sim x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \sim x_2) \vee (\sim x_1 \wedge \sim x_2)$ verifichiamo che essa descriva effettivamente la funzione data.

x_1	x_2	$\sim x_1 \wedge x_2$	$x_1 \wedge \sim x_2$	$\sim x_1 \wedge \sim x_2$	$(\sim x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \sim x_2) \vee (\sim x_1 \wedge \sim x_2)$
V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	V
V	F	V	F	F	V
F	F	F	F	V	V

Teorie formali del Calcolo Proporzionale

Diciamo di avere una teoria formale S del Calcolo Proporzionale quando:

1. Fissiamo un insieme enumerabile di simboli; i simboli di S .
2. Fissiamo "Sequenze finite di simboli", parole di S ;
3. Scegliamo un sottoinsieme (effettivo) delle parole, tale sottoinsieme è l'insieme delle formule ben formate.
4. Fissiamo un sottoinsieme delle formule ben formate, gli assiomi di S .
Se l'insieme degli assiomi è decidibile si dice che la teoria è assiomatica.
5. Introduciamo delle regole di inferenza, le quali sono delle relazioni definite sull'insieme delle formule ben formate.

Presentiamo qui di seguito una teoria formale del Calcolo Proporzionale.

Il sistema SC

I simboli di SC sono:

- (a) Variabili proposizionali: sono gli elementi di un insieme numerabile
$$P = \{p_n \mid n \in \omega\}$$
- (b) Connettivi logici: \neg (non), \wedge (et)
- (c) Simboli di punteggiatura:
) parentesi a destra, (parentesi a sinistra.

Chiamiamo *stringa* ogni sequenza finita di simboli di SC.

Noi ci occupiamo di un sottoinsieme dell'insieme delle stringhe detto *insieme delle formule* (ben formate). L'insieme delle formule è definito ricorsivamente:

- 1) Una stringa costituita da una sola variabile proposizionale è una formula;
- 2) se ϕ e ψ sono formule allora $\neg\phi$ e $(\phi \wedge \psi)$ sono formule;
- 3) una stringa è una formula se e solo si ottiene da un numero finito di applicazioni delle regole 1) e 2).

Sia F l'insieme delle formule. Adotteremo le seguenti abbreviazioni:

$\phi \vee \psi$ abbrevia $\neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$; $\phi \rightarrow \psi$ abbrevia $\neg(\phi \wedge \neg\psi)$; $\phi \leftrightarrow \psi$ abbrevia

$((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)).$

Prima di specificare la semantica del linguaggio di SC, attribuendo un valore di verità ad ogni formula, cerchiamo di capire che cosa è una variabile proposizionale. Intuitivamente possiamo pensare associata ad ogni variabile proposizionale una domanda che ammette solo due risposte: sì/no.

Per illustrare ciò procediamo con il seguente esempio.

Esempio.

Consideriamo l'alfabeto $T = \{A, a, B, b, C, c\}$ e l'insieme P delle parole $p = l_1 l_2 l_3 l_4$ con $l_i \in T$ per ogni $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ formate osservando le seguenti regole:

(1) $l_1 = l_4 \neq l_2 \neq l_3 \neq l_4$;

2) per ogni $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ $l_i \in \{A, a\}$ oppure $l_i \in \{B, b\}$ oppure $l_i \in \{C, c\}$.

Se $l_i \in \{A, B, C\}$ si dice che l_i si presenta nel caso *maiuscola*, se $l_i \in \{a, b, c\}$ allora si dice che l_i si presenta nel caso *minuscola*. Nel primo caso scriviamo $\text{caso}(l_i) = M$, nel secondo caso scriviamo $\text{caso}(l_i) = m$.

Si può provare che nessuna parola p è tale che $\text{caso}(l_i) \neq \text{caso}(l_j)$ con $j = i + 1$ e $i = 1, 2, 3$.

Considerando le variabili proposizionali come domande con risposte sì/no, possiamo porre ad un ipotetico interlocutore i seguenti quesiti:

q1: < la lettera l_1 è maiuscola? >;

q2: < la lettera l_1 è minuscola? >;

q3: < la lettera l_2 è maiuscola? >;

q4: < la lettera l_2 è minuscola? >;

q5: < la lettera l_3 è maiuscola? >;

q6: < la lettera l_3 e' minuscola? >;
q7: < la lettera l_4 e' maiuscola? >;
q8: < la lettera l_4 e' minuscola? >.

Possiamo denotare le domande q1-q8 mediante le seguenti variabili: $L_{1M}, L_{1m}, L_{2M}, L_{2m}, L_{3M}, L_{3m}, L_{4M}, L_{4m}$, rispettivamente. Ponendo $M:=1$ e $m:=2$; possiamo scrivere in generale L_{ih} per indicare la domanda "la lettera l_i si presenta nel caso h ? " con $h \in \{1,2\}$.

Facciamo vedere che l'affermazione:

(*) nessuna parola p non contiene mai due lettere successive minuscole oppure due lettere successive minuscole

puo' essere espressa attraverso le otto variabili L_{ih} sopra definite e i connettivi $\{\neg, \wedge, \vee\}$. Invero la proposizione (*) puo' essere considerata come la congiunzione delle seguenti proposizioni:

π_1 . ogni lettera si presenta almeno in un caso maiuscola o minuscola;

π_2 . ogni lettera si presenta al piu' in un caso;

π_3 . due lettere consecutive si presentano in casi diversi.

L'affermazione π_1 equivale a:

$\langle l_1 \text{ si presenta almeno in un caso} \rangle \wedge \langle l_2 \text{ si presenta almeno in un caso} \rangle \wedge \langle l_3 \text{ si presenta almeno in un caso} \rangle \wedge \langle l_4 \text{ si presenta almeno in un caso} \rangle$.

Equivalentemente si ha:

$(\langle l_1 \text{ e' maiuscola?} \rangle \vee \langle l_1 \text{ e' minuscola?} \rangle) \wedge$

$(\langle l_2 \text{ e' maiuscola?} \rangle \vee \langle l_2 \text{ e' minuscola?} \rangle) \wedge$
 $(\langle l_3 \text{ e' maiuscola?} \rangle \vee \langle l_3 \text{ e' minuscola?} \rangle) \wedge$
 $(\langle l_4 \text{ e' maiuscola?} \rangle \vee \langle l_4 \text{ e' minuscola?} \rangle).$

Procedendo per equivalenze si ottengono le seguenti formule equivalenti con la affermazione π_1 :

$$\begin{aligned}
 & (L_{1M} \vee L_{1m}) \wedge (L_{2M} \vee L_{2m}) \wedge (L_{3M} \vee L_{3m}) \wedge (L_{4M} \vee L_{4m}) \\
 & \Leftrightarrow \\
 & \bigwedge_{i=1}^4 (L_{iM} \vee L_{im}) \\
 & \Leftrightarrow \\
 & \bigwedge_{i=1}^4 (\bigvee_{h=1}^2 (L_{ih})).
 \end{aligned}$$

Analogamente, analizzando la proposizione π_2 si vede che essa equivale alle seguenti proposizioni tra loro equivalenti:

$$\begin{aligned}
 & \langle l_1 \text{ si presenta al piu' in un caso} \rangle \wedge \\
 & \langle l_2 \text{ si presenta al piu' in un caso} \rangle \wedge \\
 & \langle l_3 \text{ si presenta al piu' in un caso} \rangle \wedge \\
 & \langle l_4 \text{ si presenta al piu' in un caso} \rangle \\
 & \Leftrightarrow \\
 & \langle \neg((l_1 \text{ si presenta nel caso maiuscola?}) \wedge (l_1 \text{ si presenta nel caso minuscola?})) \rangle \wedge \\
 & \langle \neg((l_2 \text{ si presenta nel caso maiuscola?}) \wedge (l_2 \text{ si presenta nel caso minuscola?})) \rangle \wedge \\
 & \langle \neg((l_3 \text{ si presenta nel caso maiuscola?}) \wedge (l_3 \text{ si presenta nel caso minuscola?})) \rangle \wedge \\
 & \langle \neg((l_4 \text{ si presenta nel caso maiuscola?}) \wedge (l_4 \text{ si presenta nel caso minuscola?})) \rangle \\
 & \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$(\neg(L_{1M} \wedge L_{1m})) \wedge (\neg(L_{2M} \wedge L_{2m})) \wedge (\neg(L_{3M} \wedge L_{3m})) \wedge (\neg(L_{4M} \wedge L_{4m}))$$

$$\Leftrightarrow \bigwedge_{i=1}^4 (\neg(L_{iM} \wedge L_{im})) \Leftrightarrow \bigwedge_{i=1}^4 ((\neg L_{iM}) \vee (\neg L_{im}))$$

$$\Leftrightarrow \bigvee_{h=1}^2 (\bigwedge_{i=1}^4 (\neg L_{ih})).$$

L'affermazione π_3 equivale alle seguenti congiunzioni equivalenti:

$(\langle l_1 \text{ e } l_2 \text{ non sono entrambe maiuscole} \rangle \wedge \langle l_1 \text{ e } l_2 \text{ non sono entrambe minuscole} \rangle) \wedge$

$(\langle l_2 \text{ e } l_3 \text{ non sono entrambe maiuscole} \rangle \wedge \langle l_2 \text{ e } l_3 \text{ non sono entrambe minuscole} \rangle) \wedge$

$(\langle l_3 \text{ e } l_4 \text{ non sono entrambe maiuscole} \rangle \wedge \langle l_3 \text{ e } l_4 \text{ non sono entrambe minuscole} \rangle)$

\Leftrightarrow

$\langle \neg((l_1 \text{ si presenta nel caso maiuscola?}) \wedge (l_2 \text{ si presenta nel caso maiuscola?})) \wedge$

$\langle \neg((l_1 \text{ si presenta nel caso minuscola?}) \wedge (l_2 \text{ si presenta nel caso minuscola?})) \wedge$

$\langle \neg((l_2 \text{ si presenta nel caso maiuscola?}) \wedge (l_3 \text{ si presenta nel caso maiuscola?})) \wedge$

$\langle \neg((l_2 \text{ si presenta nel caso minuscola?}) \wedge (l_3 \text{ si presenta nel caso minuscola?})) \wedge$

$\langle \neg((l_3 \text{ si presenta nel caso maiuscola?}) \wedge (l_4 \text{ si presenta nel caso maiuscola?})) \wedge$

$\langle \neg((l_3 \text{ si presenta nel caso minuscola?}) \wedge (l_4 \text{ si presenta nel caso minuscola?})) \rangle$

\Leftrightarrow

$$\begin{aligned} & ((\neg(L_{1M} \wedge L_{2M})) \wedge (\neg(L_{1m} \wedge L_{2m}))) \wedge \\ & ((\neg(L_{2M} \wedge L_{3M})) \wedge (\neg(L_{2m} \wedge L_{3m}))) \wedge \\ & ((\neg(L_{3M} \wedge L_{4M})) \wedge (\neg(L_{3m} \wedge L_{4m}))) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \bigwedge_{i=1}^3 ((\neg(L_{iM} \wedge L_{i+1M})) \wedge (\neg(L_{im} \wedge L_{i+1m})))$$

$$\Leftrightarrow (\bigwedge_{i=1}^3 (\neg L_{iM} \vee \neg L_{i+1M})) \wedge (\bigwedge_{i=1}^3 (\neg L_{im} \vee \neg L_{i+1m})).$$

Abbiamo così visto che l'affermazione (*) è equivalente alla formula:

$$(\bigwedge_{i=1}^4 (\bigvee_{h=1}^2 (L_{ih}))) \wedge (\bigvee_{h=1}^2 (\bigwedge_{i=1}^4 (\neg L_{ih}))) \wedge (\bigwedge_{i=1}^3 (\neg L_{iM} \vee \neg L_{i+1M})) \wedge (\bigwedge_{i=1}^3 (\neg L_{im} \vee \neg L_{i+1m})).$$

Come si vede si tratta di una congiunzione di disgiunzioni.

Definizione 1.

Una realizzazione di SC è un'applicazione:

$$f: P \rightarrow B = \{0, 1\}$$

dove P è l'insieme delle variabili proposizionali, B è l'algebra di Boole con due elementi, f è definita ricorsivamente nel modo seguente:

$\forall \varphi, \psi \in P$ se $f(\varphi)$ e $f(\psi)$ sono già stati definiti, allora: $f(\varphi \wedge \psi) = f(\varphi) \wedge f(\psi)$ e

$f(\neg\varphi) = f(\varphi)^*$. Se la realizzazione f è tale che $f(\varphi) = 1$, allora diciamo che f soddisfa

φ e scriviamo: $f \models \varphi$ cioè $f \models \varphi$ se e solo se $f(\varphi) = 1$.

Una formula φ è soddisfacibile se essa è soddisfatta da qualche realizzazione.

Una formula che è soddisfatta da tutte le realizzazioni è detta tautologia.

Un insieme Σ di formule è detto soddisfacibile se esiste una realizzazione che

soddisfa tutte le formule in Σ .

Proposizione 5.

Sia $\varphi \in F$. Allora φ è una tautologia se e solo se $\neg\varphi$ è non soddisfacibile.

Dimostrazione.

Sia φ una tautologia, allora ogni realizzazione f soddisfa φ i. e $\forall f$ si ha che

$f(\varphi) = 1$, quindi (per definizione di realizzazione) si ha $f(\neg\varphi) = f(\varphi)^* = 1^* = 0$.

Da qui segue che ogni realizzazione non soddisfa $\neg\varphi$ cioè $\neg\varphi$ è non soddisfacibile.

Viceversa: basta invertire la dimostrazione già data.

Proposizione 6.

Siano φ e ψ due formule e f una realizzazione. Allora si ha che:

$f(\varphi \rightarrow \psi) = 0$ se e solo se $f(\varphi) = 1$ e $f(\psi) = 0$.

Dimostrazione.

$f(\varphi \rightarrow \psi) = f(\neg(\varphi \wedge \neg\psi)) = [f(\varphi \wedge \neg\psi)]^* = [f(\varphi) \wedge f(\neg\psi)]^* = [f(\varphi) \wedge f(\psi)^*]^* = f(\varphi)^* \vee f(\psi)$.

Inoltre se $f(\varphi \rightarrow \psi) = 0$ allora $f(\varphi)^* \vee f(\psi) = 0$ così $f(\varphi)^* = 0$ e $f(\psi) = 0$. Allora si ha: $f(\varphi) = 1$ e $f(\psi) = 0$.

Per dimostrare il viceversa, basta invertire la dimostrazione già data.

Proposizione 7.

Sia $\Sigma = \{\varphi_1 \dots \varphi_n\}$ un insieme finito di formule. Si ha che se ogni realizzazione che soddisfa $\Sigma \cup \{\varphi\}$ soddisfa anche ψ allora $(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ è una tautologia.

Dimostrazione.

Assumiamo che ogni realizzazione che soddisfi $\Sigma = \{\varphi_1 \dots \varphi_n\}$ soddisfa anche ψ , e per assurdo esiste una realizzazione f che non soddisfa $(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$.

Assumiamo cioè che $(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ non sia tautologia, allora $f((\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)) = 0$. Per quanto dimostrato precedentemente si ha $f(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) = 1$ e $f(\varphi \rightarrow \psi) = 0$.

Da $f(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) = 1$, si ha che $f(\varphi_1) \wedge \dots \wedge f(\varphi_n) = 1$, da cui si ha $f(\varphi_1) = 1 \dots f(\varphi_n) = 1$. Da $f(\varphi \rightarrow \psi) = 0$ si ha che $f(\varphi) = 1$ e $f(\psi) = 0$. Abbiamo così una realizzazione che soddisfa $\Sigma \cup \{\varphi\}$ e non soddisfa ψ , contro l'ipotesi.

Realizzazioni e tavole di verità

Sia B l'algebra di Boole $\{0,1\}$ e f una realizzazione, interpretiamo $f(\varphi) = 1$ come φ è vera, $f(\varphi) = 0$ come φ è falsa, interpretiamo il simbolo \wedge come "e" e \neg come "non".

Sia φ una formula di SC, supponiamo che le variabili proposizionali occorrenti in

φ siano p_0, \dots, p_{n-1} . Se f, g sono realizzazioni di SC tali che $f(p_i) = g(p_i)$ con $i < n$

allora $f(\varphi) = g(\varphi)$, così la formula φ determina una funzione, diciamo: $v_\varphi: B^n \rightarrow B$

Definita nel modo seguente: $w_\varphi(t_0, \dots, t_{n-1}) = f(\varphi)$, ove f è una realizzazione di SC tale che $f(p_i) = t_i \in B$.

Abbiamo già visto che connettivi logici $\{\neg, \wedge\}$ formano un insieme completo di connettivi, nel senso che $\forall n \in \omega$ data una funzione $q: B^n \rightarrow B$, esiste una formula φ , le cui variabili sono $p_0 \dots p_{n-1}$ costruita usando solo i connettivi che sia solo \neg e \wedge , e tale che $q = w_\varphi$. Segue che φ è una tautologia se e solo se w_φ vale 1. Poiché w_φ è una funzione con un numero finito di variabili, noi possiamo effettivamente controllare se w_φ prende valore 0 oppure 1.

Così abbiamo una procedura di decisione per stabilire se una formula arbitraria è una tautologia oppure no.

Assiomatizzazione di SC

Selezioniamo un sottoinsieme dell'insieme di tutte le tautologie, i cui elementi saranno le nostre formule valide base o altrimenti dette assiomi. Useremo anche regole di inferenza per derivare formule valide dagli assiomi.

La nostra assiomatizzazione sarà adeguata se tutte le formule valide saranno derivabili in questo modo.

Assiomi

Come assiomi assumiamo tutte le formule aventi una delle seguenti forme, ove φ, ψ, χ sono formule di SC:

$$\text{SC1: } \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$\text{SC2: } [\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)] \rightarrow [(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)]$$

$$\text{SC3: } (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$\text{SC4}_a: (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$$

$$\text{SC4}_b: (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$$

$$\text{SC5: } [\chi \rightarrow \varphi] \rightarrow [(\chi \rightarrow \psi) \rightarrow (\chi \rightarrow [\varphi \wedge \psi])]$$

$$\text{SC6}_a: \varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$$

$$\text{SC6}_b: \psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$$

$$\text{SC7: } [\varphi \rightarrow \chi] \rightarrow [(\psi \rightarrow \chi) \rightarrow ([\varphi \vee \psi] \rightarrow \chi)]$$

Come regola di inferenza usiamo la regola del

Modus Ponens: ψ è immediata conseguenza di φ e di $\varphi \rightarrow \psi$, in simboli $(\varphi, \varphi \rightarrow \psi / \psi)$.

Definizione di “Dimostrazione” (Prova)

Una prova di una formula φ è una sequenza finita $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ di formule tali che $\varphi_n = \varphi$ e per ogni $k \leq n$ φ_k è assioma oppure conseguenza di φ_i e φ_j per Modus Ponens con $i, j < k$.

Diciamo che una formula φ è dimostrabile se esiste una prova di φ . Se φ è dimostrabile scriviamo $\vdash \varphi$.

Lemma 1.

Per ogni formula $\varphi \in \text{SC}$ vale: $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$.

Dimostrazione.

Si verifica che la sequenza di formule $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ è una prova di $\varphi \rightarrow \varphi$,

ove $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ sono indicate qui di seguito:

$$\alpha_1: [\varphi \rightarrow ([\varphi \rightarrow \varphi] \rightarrow \varphi)] \rightarrow [(\varphi \rightarrow [\varphi \rightarrow \varphi]) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)]$$

(è un assioma della forma SC2)

$$\alpha_2: [\varphi \rightarrow ([\varphi \rightarrow \varphi] \rightarrow \varphi)]$$

(è un assioma della forma SC1)

- α_3 : $[(\varphi \rightarrow [\varphi \rightarrow \varphi]) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)]$
 (si ottiene da α_1 e α_2 per Modus Ponens)
- α_4 : $(\varphi \rightarrow [\varphi \rightarrow \varphi])$
 (è un assioma SC1)
- α_5 : $\varphi \rightarrow \varphi$
 (si ottiene da α_3 e α_4 per Modus Ponens)

Valgono i seguenti:

Lemma 2.

Per φ, ψ, χ formule di SC, vale:

$$\vdash (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow [(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)]$$

Lemma 3.

Per φ, ψ , formule di SC, vale: $\vdash \neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$

Ricordiamo che \rightarrow e \vee abbreviano altre formule, così il Lemma 1, che asserisce: $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$ asserisce in realtà: $\vdash \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$, in particolare ponendo $\neg\varphi$ al posto di φ si ha: $\vdash \neg(\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi)$ e quindi: $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$.

Sia Σ un insieme di formule di SC. Una prova di φ dalle assunzioni di Σ è: una sequenza finita di formule $\varphi_1 \dots \varphi_n$ tale che $\varphi = \varphi_n$ e $\forall k \leq n$ φ_k è un assioma, oppure $\varphi_k \in \Sigma$, oppure per $i, j < k$ φ_k è una conseguenza (via Modus Ponens) di φ_i e φ_j .

Se esiste una prova di φ da Σ , scriviamo $\Sigma \vdash \varphi$. Osserviamo che dalla definizione data, Σ potrebbe essere infinito.

Teorema 2. (Finitezza del calcolo proposizionale)

Sia Σ un insieme di formule di SC. Se $\Sigma \vdash \varphi$ allora esiste un sottoinsieme finito Σ_0 di Σ tale che $\Sigma_0 \vdash \varphi$.

Dimostrazione.

Sia $\varphi_1 \dots \varphi_n$ una prova di φ da Σ , sia, poi Σ_0 l'insieme delle formule di Σ occorrenti in questa prova. Allora Σ_0 è finito e $\varphi_1 \dots \varphi_n$ è una prova di φ da Σ_0 .

Indichiamo con **Taut** l'insieme delle tautologie e con **Prov** l'insieme delle formule dimostrabili di SC. Allora si ha:

Teorema 3.

Prov \subseteq **Taut**

Dimostrazione.

La dimostrazione avviene sulla lunghezza delle prove. Noi mostreremo che:

1. Ogni assioma è una tautologia;
2. Se (φ) e $(\varphi \rightarrow \psi)$ sono tautologie, allora anche ψ è una tautologia.

Proviamo che SC1: $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \in \mathbf{Taut}$. Invero, sia f una realizzazione di $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$, allora:

$f(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)) = f(\neg\varphi \vee (\neg\psi \vee \varphi)) = f(\neg\varphi) \vee f(\neg\psi) \vee f(\varphi) = f(\varphi)^* \vee f(\psi)^* \vee f(\varphi) = 1 \vee f(\psi)^* = 1$. Allora ogni realizzazione assume valore 1 in SC1. Quindi SC1 è una tautologia.

Si procede allo stesso modo per gli altri assiomi.

Supponiamo ora che $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \in \mathbf{Taut}$. Sia f una realizzazione di SC, allora segue che: $f(\varphi) = f(\varphi \rightarrow \psi) = 1$. Quindi:

$f(\psi) = [f(\varphi) \wedge f(\varphi)^*] \vee f(\psi) = [f(\varphi) \vee f(\psi)] \wedge [f(\varphi)^* \vee f(\psi)] = [1 \vee f(\psi)] \wedge [f(\varphi \rightarrow \psi)] = 1$, quindi $\psi \in \mathbf{Taut}$ perché per ogni realizzazione f si ha $f(\psi) = 1$.

Corollario 1.

Non esiste una formula φ tale che, sia φ che $\neg\varphi$, siano provabili.

Dimostrazione.

Una realizzazione f soddisfa φ se e solo se non soddisfa $\neg\varphi$. Perciò φ e $\neg\varphi$ non possono essere entrambe tautologie. Quindi, poiché **Prov** \subseteq **Taut**, non può essere $\varphi \in \mathbf{Prov}$ e $\neg\varphi \in \mathbf{Prov}$.

Esercizio 1:

Mostrare che

$(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\varphi)$ è una tautologia.

Dimostrazione.

Vale la seguente catena di relazioni:

$$\begin{aligned}
 (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\varphi) &= \\
 = (\neg\varphi \vee \psi) \rightarrow ((\neg\varphi \vee \neg\psi) \rightarrow \neg\varphi) &= \\
 = (\neg\varphi \vee \psi) \rightarrow (\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \vee \neg\varphi) &= \\
 = \neg(\neg\varphi \vee \psi) \vee (\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \vee \neg\varphi). &
 \end{aligned}$$

Per una qualsiasi realizzazione f si ha:

$$\begin{aligned}
 f(\neg(\neg\varphi \vee \psi) \vee (\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \vee \neg\varphi)) &= \\
 = f(\neg\varphi \vee \psi)^* \vee f(\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \vee \neg\varphi) &= \\
 = [(f(\varphi))^* \vee f(\psi)]^* \vee f(\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \vee \neg\varphi) &= \\
 = (f(\varphi) \wedge f(\psi)^*) \vee (f(\neg\varphi \vee \neg\psi))^* \vee f(\varphi)^* &= \\
 = (f(\varphi) \wedge f(\psi)^*) \vee (f(\varphi)^* \vee f(\psi)^*)^* \vee f(\varphi)^* &= \\
 = (f(\varphi) \wedge f(\psi)^*) \vee (f(\varphi) \wedge f(\psi)) \vee f(\varphi)^* &= \\
 = f(\varphi) \wedge (f(\psi)^* \vee f(\psi)) \vee f(\varphi)^* &= \\
 = f(\varphi) \vee f(\varphi)^* = 1 &
 \end{aligned}$$

Esercizio 2.

Dimostrare che se $\Sigma \vdash \varphi$ allora ogni realizzazione che soddisfa ogni formula di Σ soddisfa anche φ .

Dimostrazione:

Sia f una realizzazione che soddisfa ogni formula di Σ . Allora, poiché vale $\Sigma \vdash \varphi$ si ha che esiste una prova di φ sotto Σ . Cioè esistono $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ tali che $\varphi_n = \varphi$ e $\varphi_{k < n}$ siano assiomi oppure elementi di Σ , oppure per $i, j < k$ φ si ottiene, per Modus Ponens, da φ_i, φ_j . Quindi $f(\varphi_i) = 1$, $f(\varphi_j) = 1$, questo perché $\varphi_i, \varphi_j \in \Sigma$, oppure sono assiomi. Quindi φ si ottiene dalle precedenti al più per Modus Ponens. Poiché il Modus Ponens ha la proprietà di conservare la valutazione $f(\cdot) = 1$, segue $f(\varphi) = 1$.

Algebra di Lindenbaum

In questo paragrafo mostreremo come dotare l'insieme F delle formule di SC di una struttura di algebra di Boole. Invero, definiamo una relazione \approx su F : $\varphi \approx \psi$ se e solo se $\vdash \varphi \rightarrow \psi$ e $\vdash \psi \rightarrow \varphi$.

Dal Lemma 1 segue che \approx è riflessiva, ovviamente \approx è simmetrica e dal Lemma 2 segue che \approx è anche transitiva. Così \approx risulta una equivalenza.

Esercizio 3.

Dimostrare che se $\varphi \approx \varphi'$ e $\psi \approx \psi'$ allora $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow \vdash (\varphi' \rightarrow \psi')$.

Dimostrazione:

Se $\varphi \rightarrow \psi$, allora da $\varphi \approx \varphi'$ i.e. $\vdash \varphi \rightarrow \varphi'$ e $\vdash \varphi' \rightarrow \varphi$, da $\psi \approx \psi'$ i.e. $\vdash \psi \rightarrow \psi'$ e $\vdash \psi' \rightarrow \psi$, e dal Lemma 2, segue $\vdash (\psi \rightarrow \psi') \rightarrow [(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi')]$.

Da ciò e da $\vdash (\psi \rightarrow \psi')$, che vale per ipotesi, via Modus Ponens otteniamo che vale

$\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi')$. Da ciò, e da $\vdash \varphi \rightarrow \psi$, che vale per ipotesi, ancora via Modus Ponens otteniamo $\vdash (\varphi \rightarrow \psi')$. Dal Lemma 2, otteniamo: $\vdash (\varphi \rightarrow \psi') \rightarrow ((\varphi' \rightarrow \varphi) \rightarrow (\varphi' \rightarrow \psi'))$. Così, dalle due ultime formule, via Modus Ponens, otteniamo che vale $\vdash (\varphi' \rightarrow \varphi) \rightarrow (\varphi' \rightarrow \psi')$. Ancora, per ipotesi abbiamo: $\vdash (\varphi' \rightarrow \varphi)$ e per Modus Ponens finalmente otteniamo che vale $\vdash (\varphi' \rightarrow \psi')$.

L'inversa si dimostra in modo analogo.

Se $\varphi \in F$, denotiamo con $|\varphi|$ la classe di φ modulo \approx , così $|\varphi| = \{\psi \in F \mid \varphi \approx \psi\}$.

Poniamo $F/\approx = \{|\varphi| : \varphi \in F\}$. Definiamo su F/\approx la relazione \leq nel modo seguente:

$|\varphi| \leq |\psi|$ se e soltanto se $\vdash \varphi \rightarrow \psi$.

Dall'esercizio precedente si vede che questa è una buona definizione; cioè essa non dipende dal rappresentante della classe.

Teorema 4

$A = \langle F/\approx, \leq \rangle$ è un'algebra Booleana e si ha:

$|\varphi| = 1$ se e solo se $\vdash \varphi$
 $|\varphi| = 0$ se e solo se $\vdash \neg\varphi$

Dimostrazione:

Dal Lemma 1, segue che \leq è riflessiva. Per definizione, \leq è antisimmetrica, dal Lemma 2 segue infine che \leq è transitiva. Quindi, $(F/\approx, \leq)$ è un insieme parzialmente ordinato.

Sia $\{|\varphi|, |\psi|\}$ un sottoinsieme di F/\approx , mostriamo che

$$|\varphi \wedge \psi| = \inf \{|\varphi|, |\psi|\} := |\varphi| \wedge |\psi|.$$

Da SC4a e SCb otteniamo che valgono $\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$ e $\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$.

Quindi, dalla definizione di \leq , segue $|\varphi \wedge \psi| \leq |\varphi|$ e $|\varphi \wedge \psi| \leq |\psi|$.

Così $|\varphi \wedge \psi|$ è minorante per $\{|\varphi|, |\psi|\}$. Sia $|\chi|$ un minorante per $\{|\varphi|, |\psi|\}$, allora vale sia $\vdash \chi \rightarrow \varphi$ che $\vdash \chi \rightarrow \psi$. Allora, dall'assioma $\vdash [\chi \rightarrow \varphi] \rightarrow [(\chi \rightarrow \psi) \rightarrow (\chi \rightarrow [\varphi \wedge \psi])]$ e da $\vdash \chi \rightarrow \varphi$, via Modus Ponens, otteniamo $\vdash (\chi \rightarrow \psi) \rightarrow (\chi \rightarrow [\varphi \wedge \psi])$. Da ciò, e da $\vdash \chi \rightarrow \psi$, ancora mediante una applicazione del Modus Ponens, otteniamo $\vdash \chi \rightarrow (\varphi \wedge \psi)$.

Quindi possiamo affermare che:

$|\chi| \leq |\varphi \wedge \psi|$, e quindi che $|\varphi \wedge \psi|$ è l' $\inf\{|\varphi|, |\psi|\}$.

Allo stesso modo si prova

che $|\varphi \vee \psi| = |\varphi| \vee |\psi|$ e anche $(|\varphi| \vee |\psi|) \wedge |\chi| = (|\varphi| \wedge |\chi|) \vee (|\psi| \wedge |\chi|)$.

Abbiamo così visto che A è un reticolo distributivo.

Sia $\vdash \varphi$, allora per ogni formula ψ e per SC1, $\vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$, via Modus Ponens, otteniamo $\vdash \psi \rightarrow \varphi$ e $|\psi| \leq |\varphi|$. Quindi $\vdash \varphi$ implica che $|\varphi| = 1$ che è il massimo elemento di A . Analogamente, se $\vdash \neg\varphi$ allora $|\varphi| = 0$ il minimo elemento di A .

Viceversa, sia $|\varphi| = 1$ allora per ogni formula ψ si ha che $|\psi| \leq |\varphi|$, e quindi che $\vdash \psi \rightarrow \varphi$. Perciò, scegliendo la formula ψ tale che $\vdash \psi$, via Modus Ponens, abbiamo $\vdash \varphi$. Analogamente, se $|\varphi| = 0$ si ha $\vdash \neg\varphi$.

Infine, poiché abbiamo già visto che per ogni formula φ vale $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$ e $\vdash \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$, allora si ha che $|\varphi| \vee |\neg\varphi| = 1$ e $|\varphi| \wedge |\neg\varphi| = 0$.

Allora, A è un reticolo complementato, il complemento di $|\varphi|$ è $|\neg\varphi|$.

Così, A è un reticolo distributivo complementato, quindi A è algebra di Boole. Poiché, per il Corollario 1, non ogni formula di F è provabile, allora A contiene almeno due elementi.

A è detta *algebra di Lindenbaum* di SC.

Lemma 4. (Lemma di estensione)

Sia η un omomorfismo dell'algebra di Lindenbaum A nell'algebra di Boole $\{0, 1\}$. Sia f una mappa definita sull'insieme delle variabili proposizionali, P , a valori nell'algebra Booleana $\{0, 1\}$ da: $f(p_n) = \eta(|p_n|)$. Allora, estendendo f nel modo seguente: per ogni formula $\varphi \in F$, $f(\varphi) = \eta(|\varphi|)$; segue che f è una realizzazione di SC.

Dimostrazione.

La dimostrazione avviene per induzione sul numero dei connettivi logici presenti in φ .

Il lemma ovviamente vale sulle variabili proposizionali. Supponiamo che il lemma sia vero per le formule φ e ψ . Allora, poiché η è omomorfismo si ha

$$f(\varphi \wedge \psi) = f(\varphi) \wedge f(\psi) = \eta(|\varphi|) \wedge \eta(|\psi|) = \eta(|\varphi| \wedge |\psi|) = \eta(|\varphi \wedge \psi|)$$

e anche

$$f(\neg\varphi) = (f(\varphi))^* = (\eta(|\varphi|))^* = \eta(|\varphi|^*) = \eta(|\neg\varphi|).$$

Abbiamo dimostrato che $f(\neg\varphi) = \eta(|\neg\varphi|)$. Allora il lemma è vero per tutte le formule.

Si dice che f è la *realizzazione indotta* da η . Osserviamo che c'è una naturale corrispondenza tra gli ultrafiltri di A e le realizzazioni di SC. Infatti, sia Y ultrafiltro di A allora l'algebra A/Y è isomorfa all'algebra booleana $\{0, 1\}$; così in corrispondenza di Y otteniamo l'omomorfismo canonico η da A a A/Y . Si ha quindi che η si estende ad una realizzazione f_Y (f_Y è indotto da η).

Viceversa, sia f una realizzazione di SC. Poniamo $Y_f = \{|\varphi| : f(\varphi) = 1\}$.

Proviamo che Y_f è un ultrafiltro di A . Invero per ogni $\varphi \in SC$ tale $\vdash \varphi$ si ha $|\varphi| = \max$ di A . Quindi $\max A \in Y_f$ perché $\vdash \varphi$ implica $f(\varphi) = 1$ e $|\varphi| \in Y_f$. Proviamo ora che Y_f è chiuso rispetto alla operazione \wedge .

Invero, da $|\varphi|, |\psi| \in Y_f$ si ha: $f(\varphi) = 1$ e $f(\psi) = 1$. Allora abbiamo che $f(\varphi) \wedge f(\psi) = 1$, cioè $f(\varphi \wedge \psi) = 1$. Da ciò si ha: $|\varphi \wedge \psi| \in Y_f$ e quindi, come richiesto, $|\varphi| \wedge |\psi| \in Y_f$.

Proviamo ora che se $|\varphi| \in Y_f$ e $|\varphi| \leq |\psi|$ allora $|\psi| \in Y_f$. Infatti, da $|\varphi| \in Y_f$ segue $f(\varphi) = 1$, da $|\varphi| \leq |\psi|$ segue $\vdash \varphi \rightarrow \psi$, e quindi $f(\varphi \rightarrow \psi) = 1$.

Così abbiamo che $f(\neg\varphi) \vee f(\psi) = 1$, cioè $f(\neg\varphi) \vee f(\psi) = 1$. Da ciò e da $f(\neg\varphi) = 0$ si ha $f(\psi) = 1$, i.e., $|\psi| \in Y_f$.

Quindi Y_f è un filtro. Proviamo ora che esso è primo, e quindi ultrafiltro. Invero, se $|\varphi| \vee |\psi| \in Y_f$, cioè $|\varphi \vee \psi| \in Y_f$, allora $f(\varphi \vee \psi) = 1$ implica $f(\varphi) \vee f(\psi) = 1$. Così abbiamo che $f(\varphi) = 1$ oppure $f(\psi) = 1$. Allora, si ha che $|\varphi| \in Y_f$ oppure $|\psi| \in Y_f$. Cioè, la primalità di Y_f .

Teorema 5. (di completezza del calcolo proposizionale)

Ogni tautologia di SC è dimostrabile.

Dimostrazione.

Supponiamo che non sia provabile $\varphi \in SC$. Allora, $|\varphi| \in A \setminus \{1\}$ cioè $|\varphi| \neq 1$ e quindi $|\neg\varphi| \neq 0$. Allora esiste un ultrafiltro Y di A tale che $|\neg\varphi| \in Y$; inoltre $A/Y \cong \{0, 1\}$.

Sia η l'omomorfismo canonico η da A a A/Y , e sia f la realizzazione di SC indotta da η . Poiché $|\neg\varphi| \in Y$, segue che $\eta(|\neg\varphi|) = 1$, e quindi $f(\neg\varphi) = 1$.

Cio' implica che $f(\varphi) = 0$. Abbiamo così trovato una realizzazione f che manda φ in 0.

Allora φ non è una tautologia. Quindi, **Taut** \subseteq **Prov**. Avendo già dimostrato che **Prov** \subseteq **Taut**. Concludiamo dicendo che **Taut** = **Prov**.

Valgono le seguenti :

Proposizione 8

Per ogni n si ha:

$$\vdash \varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow \dots \rightarrow (\varphi_n \rightarrow (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n))) .$$

Proposizione 9

Per ogni n si ha:

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\} \vdash \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n .$$

Teorema 6. (di deduzione).

Sia Σ un insieme di formule di SC. Siano φ, ψ due formule di SC. Se $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$, allora $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$.

Dimostrazione.

Supponiamo che $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$, per il teorema di finitezza esiste un sottoinsieme finito $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \subseteq \Sigma$ tale che $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \cup \{\varphi\} \vdash \psi$. Abbiamo già provato, sotto queste ipotesi (esercizio2) che ogni realizzazione che soddisfa $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \cup \{\varphi\}$ soddisfa anche ψ .

Affermiamo che $(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ è una tautologia. Infatti: se non fosse una tautologia esisterebbe una realizzazione f tale che $f((\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)) = 0$. Da ciò con facili calcoli, si ottiene $f(\varphi_1) = 1 \dots f(\varphi_n) = 1, f(\varphi) = 1, f(\psi) = 0$. Quindi f sarebbe una realizzazione che soddisfa $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \cup \{\varphi\}$ ma che non soddisfa ψ , contro quanto già stabilito. Quindi $(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ è una tautologia.

Per il teorema di completezza essa è derivabile, cioè $\vdash (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$. Poiché si ha (basta vedere che è una tautologia) $\vdash (\varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow (\varphi_3 \rightarrow \dots \rightarrow (\varphi_n \rightarrow (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n))))$ allora sotto $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ si ha (dalla definizione di prova sotto ipotesi):

$\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \vdash (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n)$ e quindi per Modus Ponens si ha: $\Sigma \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$.

Compattezza del calcolo proposizionale.

Un insieme Σ di formule di SC si dice *consistente* se non esiste una φ tale che $\Sigma \vdash \varphi$ e $\Sigma \vdash \neg\varphi$.

Per il corollario l'insieme vuoto è consistente, infatti non è vero che $\vdash \varphi$ e $\vdash \neg\varphi$.

Lemma 5.

Sia Σ un insieme di formule e sia φ una formula. Allora $\Sigma \cup \{\varphi\}$ è consistente se e solo se non è vero $\Sigma \vdash \neg\varphi$.

Dimostrazione.

Se $\Sigma \vdash \neg\varphi$ a maggior ragione si ha $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\varphi$. Inoltre, ovviamente, $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$ e quindi $\Sigma \cup \{\varphi\}$ non è consistente. Supponiamo ora che $\Sigma \cup \{\varphi\}$ non sia consistente. Allora $\exists \psi$ tale che $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ e $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\psi$. Per il teorema di deduzione $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ e $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \neg\psi$. Inoltre si può provare che la formula: $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow [(\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\varphi]$ è una tautologia, e per il teorema di completezza essa è derivabile: $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow [(\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\varphi]$. Così usando il Modus Ponens due volte si ha: $\Sigma \vdash \neg\varphi$.

Osservazione: $\{\varphi\}$ è consistente se e solo se $\neg\varphi$ non è provabile, se e solo se $\neg\varphi$ non è una tautologia. Quindi se e solo se esiste una realizzazione f tale che $f(\neg\varphi) = 0$, i.e. se e solo se esiste una realizzazione $f(\varphi) = 1$. Quindi $\{\varphi\}$ è consistente se e solo se φ è soddisfacibile.

Teorema 7.

Un insieme finito di formule $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ è consistente se e solo se l'unica formula $\{\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n\}$ è consistente.

Dimostrazione.

Assumiamo che $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ sia consistente. Per assurdo assumiamo che l'insieme $\{(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n)\}$ non sia consistente Allora $(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n)$ non è soddisfacibile, quindi per ogni realizzazione $f \exists i \leq n \mid f(\varphi_i) = 0$, quindi $\forall f \exists i \mid f(\neg\varphi_i) = 1$. Abbiamo allora che per ogni realizzazione $f(\neg\varphi_1 \vee \dots \vee \neg\varphi_n) = 1$, quindi $\neg\varphi_1 \vee \dots \vee \neg\varphi_n$ è una tautologia, e per il teorema di completezza si ha che: $\vdash \neg\varphi_1 \vee \dots \vee \neg\varphi_n$ cioè: $\vdash \neg(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n)$. A maggior ragione si ha:

$$\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \vdash \neg(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \quad (1).$$

Inoltre, abbiamo già provato che:

$$\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \vdash (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \quad (2).$$

Così da (1), (2) segue che $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ non è consistente, contro l'ipotesi di consistenza di $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$. Allora $\{(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n)\}$ è consistente.

Viceversa. Sia $\{(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n)\}$ consistente, allora $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$ è consistente, così esiste una realizzazione f tale che $f(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) = 1$, cioè $f(\varphi_1) = 1 \dots f(\varphi_n) = 1$. Quindi per ogni i , $\{\varphi_i\}$ è soddisfatto. Cioè ogni $\{\varphi_i\}$ è consistente. Allora $\forall i : \vdash \neg\varphi_i$ non sussiste.

Abbiamo allora che:

$$(*) \quad \forall i \{ \varphi_1, \dots, \varphi_n \} \vdash \neg\varphi_i \text{ non sussiste.}$$

Sia per assurdo $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ non consistente, quindi $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}\} \cup \{\varphi_n\}$ non consistente. Per il lemma 5 vale $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}\} \vdash \neg\varphi_n$. Allo stesso modo si ha che per ogni i $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}, \varphi_{i+1}, \dots, \varphi_n\} \cup \{\varphi_i\} \vdash \neg\varphi_i$ sussiste. Cioè $\forall i \{ \varphi_1, \dots, \varphi_n \} \vdash \neg\varphi_i$.

Assurdo contro la (*).

Così concludiamo che un insieme finito di formule è consistente se e solo se esso è soddisfacibile; cioè $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ è consistente se e solo se per ogni $i < n$ esiste una realizzazione f tale che $f(\varphi_i) = 1$.

Teorema 8(di compattezza).

Sia Σ un insieme di formule di SC allora Σ è soddisfacibile se e solo se ogni sottoinsieme finito di Σ è soddisfacibile.

Dimostrazione.

Ovviamente se Σ è soddisfacibile allora ogni sottoinsieme finito di Σ è soddisfacibile.

Viceversa. Supponiamo che ogni sottoinsieme finito di Σ sia soddisfacibile. Sia $n < \omega$, supponiamo che: abbiamo trovato un'applicazione $\phi: \{p_i \mid i < n\} \rightarrow \{0, 1\}$ tale che (*) \forall sottoinsieme finito Σ_0 di Σ esiste una realizzazione che soddisfa Σ_0 e concorda con ϕ sopra $\{p_i \mid i < n\}$. Quando $n = 0$ questa assunzione equivale ad assumere la nostra ipotesi che ogni sottoinsieme finito $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ è soddisfacibile (non c'è nulla da concordare). Mostriamo come è possibile estendere ϕ da $\{p_i \mid i < n\}$ all'insieme $\{p_i \mid i \leq n\}$ in modo da conservare la stessa proprietà.

Supponiamo che la proprietà (*) non valga ponendo $f(p_n) = 0$, allora $\exists \Sigma_0$ finito sottoinsieme proprio di Σ tale che Σ_0 non è soddisfatto da ogni realizzazione che concorda con f su $\{p_i \mid i < n\}$ e $f(p_n) = 0$.

Sia Σ_1 finito $\subset \Sigma$, allora $\Sigma_2 = \Sigma_0 \cap \Sigma_1$ è finito \subset così dall'ipotesi (*) avremo: dato Σ_2 esiste una realizzazione g che soddisfa Σ_2 e che concorda con f su $\{p_i \mid i < n\}$. ma dalla scelta di Σ_0 , questa realizzazione g deve mandare $p_n \rightarrow 1$, perciò Σ_1 è soddisfatto da una realizzazione g che concorda con f su $\{p_i \mid i < n\}$ e che assume valore 1 su p_n , segue che possiamo procedere per ricorsione su n , e definire una realizzazione di SC tale che $\forall n < \omega$ ogni sottoinsieme finito di Σ è soddisfatto da una realizzazione che concorda con f su $\{p_i \mid i < n\}$.

Proviamo che f soddisfa Σ , invero, sia $\varphi \in \Sigma$ allora scegliendo n sufficientemente grande in modo che tutte le variabile preposizionali di φ siano in $\{p_i \mid i < n\}$, si ha ovviamente che f soddisfa φ quindi f soddisfa Σ .

Teorema 9.

Sia Σ un insieme di formule di SC, Σ è consistente se e solo se ogni sottoinsieme finito di Σ è consistente.

Dimostrazione.

Supponiamo che Σ abbia un sottoinsieme finito Σ_0 che sia non consistente. Allora esisterà $\varphi \mid \Sigma_0 \vdash \varphi$ e che $\Sigma_0 \vdash \neg\varphi$. A maggior ragione abbiamo che $\Sigma \vdash \varphi$ e che $\Sigma \vdash \neg\varphi$ e quindi Σ è non consistente.

Viceversa.

Supponiamo Σ non consistente, Allora $\exists \varphi \mid \Sigma \vdash \varphi$ e che $\Sigma \vdash \neg\varphi$. Dal teorema di finitezza esistono sottoinsiemi finiti Σ_1 e Σ_2 tali di Σ tali che $\Sigma_1 \vdash \varphi$ e che $\Sigma_2 \vdash \neg\varphi$. Allora $\Sigma_0 = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ finito e tale che $\Sigma_0 \vdash \varphi$ e che $\Sigma_0 \vdash \neg\varphi$, assurdo.

Teorema 10 (di completezza generalizzato).

Sia Σ un insieme di formule di SC

Allora le seguenti sono equivalenti:

- (2) Σ è consistente.
- (3) Σ è soddisfacibile

Dimostrazione

Consideriamo le seguenti affermazioni:

- (3) ogni sottoinsieme finito di Σ è consistente
- (4) ogni sottoinsieme finito di Σ è soddisfacibile.

dal Teorema 9 abbiamo visto che (1) \Leftrightarrow (3)

dal Teorema 8 abbiamo che (2) \Leftrightarrow (4)

Inoltre abbiamo già verificato che un insieme finito di formule è consistente se e solo se esso è soddisfacibile, i.e. (3) \Leftrightarrow (4)

otteniamo allora che (1) \Leftrightarrow (2)