

Utilizzo delle copule per la descrizione di reti neuronali

Laura Sacerdote

Dipartimento di Matematica, Università di Torino

Via Carlo Alberto 10, 10123 Torino

e-mail: laura.sacerdote@unito.it

L'utilizzo di modelli matematici è stato un importante strumento per la comprensione del codice nervoso. Molti sforzi, durati vari decenni, hanno determinato la messa a punto e lo studio di modelli per la descrizione dell'attività di singoli neuroni. Tra i vari modelli sviluppati i modelli tipo "Leaky Integrate and Fire" rivestono particolare importanza per due motivi principali: da una parte risultano capaci di adattarsi a una grande varietà di dati sperimentali e dall'altra sono sufficientemente semplici da consentire lo studio analitico o numerico. L'utilizzo di questi modelli è stato utile per comprendere varie proprietà dei neuroni, quali il ruolo del rumore o la capacità del neurone di rispondere a stimoli periodici.

I nuovi dati sperimentali, che consentono registrazioni simultanee da più neuroni, suggeriscono di ampliare lo studio alle reti neuronali. Considerata l'utilità dei modelli nel caso di neuroni singoli, sembra ora naturale cercare di sviluppare modelli per le reti nervose. Sfortunatamente la grande complessità di tali reti sembra scoraggiare approcci analitici e spesso si ricorre a studi puramente simulativi. Teoria di campo medio o sistemi multi particelle sono alcuni degli approcci matematici utilizzati in letteratura. Tuttavia questi metodi non consentono di mettere in relazione il comportamento delle singole unità con quello del sistema globale e rischiano di perdere la possibilità di descrivere dinamiche determinate dalla cooperazione tra le varie unità della rete.

Qui proponiamo un approccio che presenta il pregio di permettere di riutilizzare le nostre competenze relative a singoli neuroni nella formulazione del modello di rete. Osservando che la dinamica di rete deve venir descritta da processi multivariati, proponiamo di utilizzare le copule per tener conto delle proprietà associative della rete. Le copule sono particolari funzioni che permettono di utilizzare le distribuzioni marginali per ottenere la distribuzione congiunta. L'utilizzo delle copule è stato proposto recentemente per la descrizione statistica di conteggi di spari neuronali mentre il loro utilizzo per problemi di modellistica ci sembra ancora sottovalutato. Qui proponiamo un possibile utilizzo delle copule per sviluppare modelli di reti. Sebbene le idee proposte siano applicabili a reti di maggiore dimensionalità qui ci limiteremo al caso di due soli neuroni, per esemplificare le problematiche matematiche coinvolte. Nel modello descriviamo i due neuroni tramite un modello di tipo Leaky Integrate and Fire e accoppiamo i rispettivi termini di rumore tramite opportune copule. In seguito studiamo la dipendenza tra i tempi di sparo dei due neuroni determinata dalla dipendenza tra i rumori. Varie proprietà di questi tempi verranno discusse sia da un punto di vista statistico simulativo che da quello analitico. Elencheremo infine una serie di problemi matematici aperti suggeriti dal modello e discuteremo la soluzione di un problema matematico ad essi collegato.